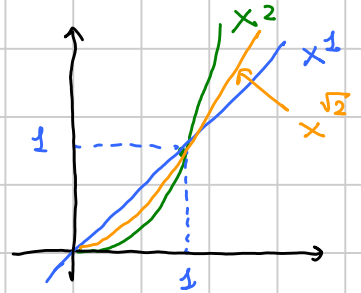
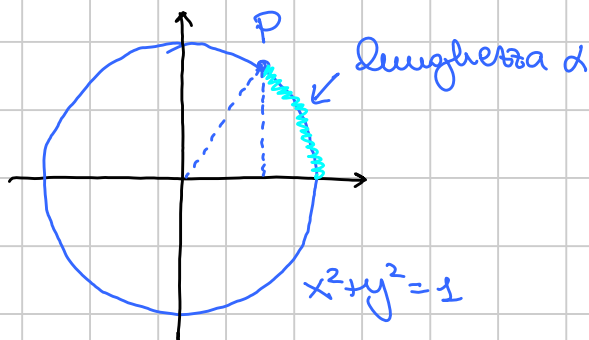


Oss. Definite gli esponenziali, sono definite anche le funzioni $f(x) = x^\alpha$ con esponente $\alpha \in \mathbb{R}$. Queste funzioni, tranne casi particolari, sono definite solo per $x > 0$.
Per α positivo, le proprietà sono le stesse delle x^n precedenti

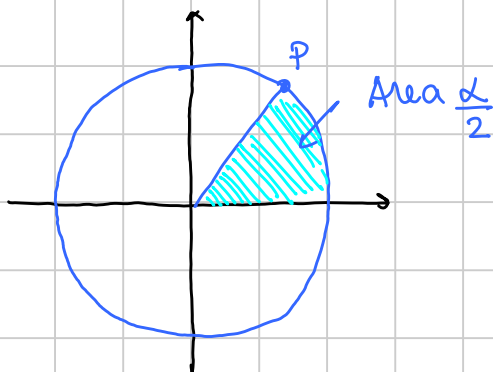


FUNZIONI TRIGONOMETRICHE



concetto "losco"

Se l'arco ha lunghezza α , allora le coordinate di P sono $(\cos \alpha, \sin \alpha)$



"losco"

Se il settore ha area $\frac{\alpha}{2}$, allora $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$

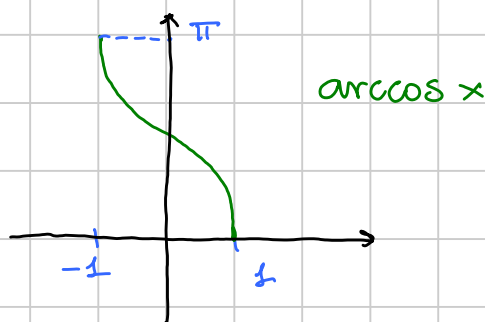
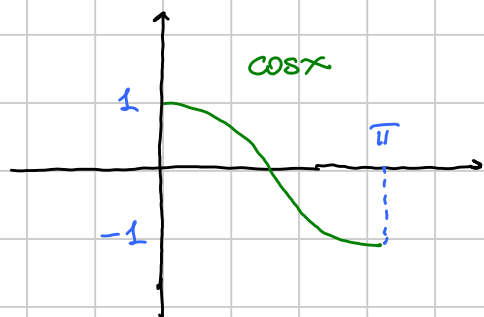
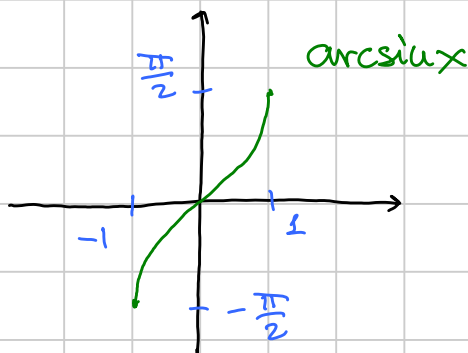
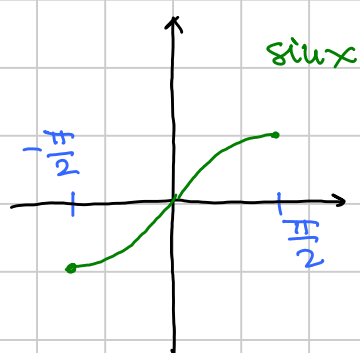
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Fatti **$\sin x$** La funzione $f(x) = \sin x$, vista come

$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ è strett. cresc. e invertibile. L'inversa è

$g: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ed è detta $g(x) = \arcsin x$

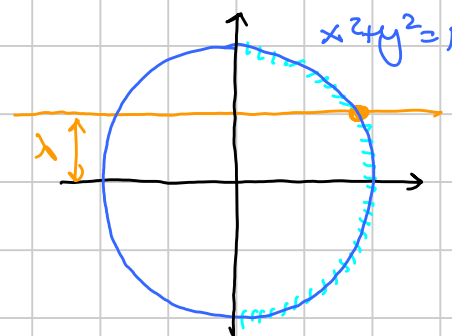
$\cos x$ La funzione $f(x) = \cos x$, vista come $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ è strett. decrescente e invertibile. L'inversa è
 $g: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ $g(x) = \arccos x$



Interpretazione nella circ. trigonometrica.

Se voglio calcolare $\arcsin \lambda$, allora interseco con la retta $y = \lambda$ e prendo l'intersezione in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

La lung. dell'arco corrisp. è $\arcsin \lambda$.

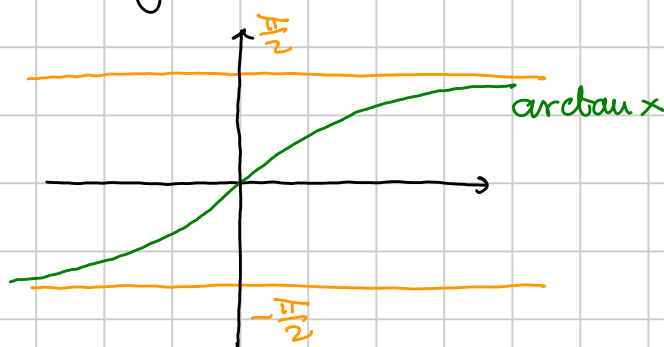
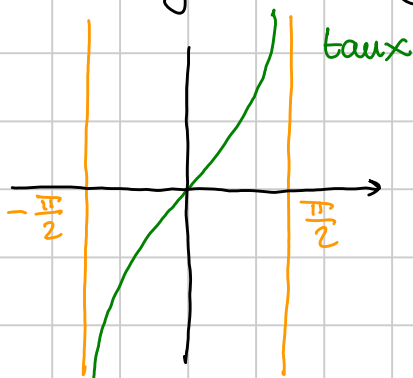


Per $\arccos \lambda$, stessa cosa con la retta $x = \lambda$ prendendo l'intersezione "sopra"

$\tan x$ Vista come $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ è strett. cresc. e invertibile. L'inversa è

$$g: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$g(x) = \arctan x$$



Esercizio Mostrane che

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0$$

Dim.: Sia $\alpha = \arctan x$, quindi $x = \tan \alpha$. Ma allora

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{precorso}}}{=} \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{x}, \text{ quindi } \frac{\pi}{2} - \alpha = \arctan \frac{1}{x}$$

$$\text{Ma allora } \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \square$$

Analogamente,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \forall x < 0$$

Dimostrare $\rightarrow$ sia usando la dispanità
 $\rightarrow$ sia usando il percorso

Domanda: dove ho usato sopra che fosse $x > 0$??

Esercizio

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Dim.: $\arcsin x = \alpha$, quindi $x = \sin \alpha$. Ora

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{precorso}}}{=} \sin \alpha = x, \text{ quindi } \frac{\pi}{2} - \alpha = \arccos x$$

$$\text{Sommando: } \arcsin x + \arccos x = \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \square$$

Esercizio

$$\arcsin(\sin 1) = 1$$

$$\arccos(\cos 1) = 1$$

$$\arcsin(\sin 2) =$$

$$\arccos(\cos 2) = 2$$

$$\arcsin(\sin 3) =$$

$$\arccos(\cos 3) = 3$$

$$\arcsin(\sin 4) =$$

$$\arccos(\cos 4) =$$

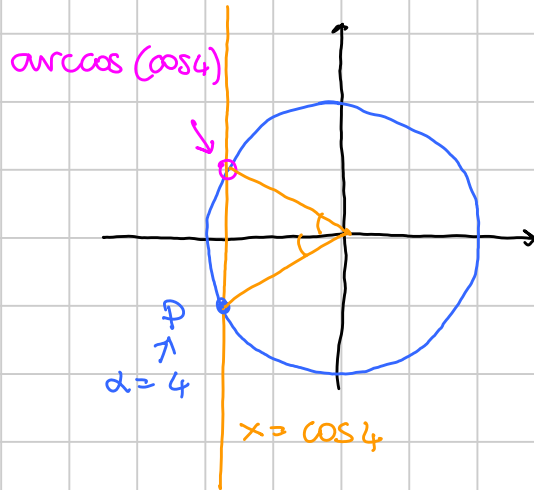
Achtung! Se g è l'inversa di f , allora
 $g(f(x)) = x \quad \forall x \in A$

quindi $\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 $\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$

Quanto fa $\arccos(\cos 4)$?

Quindi $\arccos(\cos 4) = 2\pi - 4$

Allo stesso modo si sistemano quelli con $\sin x$ e $\arcsin x$.



— o — o —

Esercizio (equazioni)

$$2^{3x+4} = 2^{4x+3}$$

SI

$$\log_2(3x+4) = \log_2(4x+3)$$

NO

$$\sin(3x+4) = \sin(4x+3)$$

NO

$$\leadsto 3x+4 = 4x+3 \leadsto x=1.$$

Questione di iniettività: SI nel 1° caso, SI nel 2° caso ma devo imporre di essere dove $\log_2$ è definita, quindi imporre $3x+4 > 0$, NO nel terzo.

Disuguaglianze

$$2^{x+3} > 2^{3x+1}$$

SI

$$\log_3(x+3) > \log_3(3x+1)$$

NO

$$x+3 > 3x+1$$

$$\sin(x+3) > \sin(3x+1)$$

NO

Il passaggio

$$f(A) > f(B) \Rightarrow A > B$$

è OK se f è crescente (strett. o debolmente?)

$$f(A) \geq f(B) \Rightarrow A \geq B$$

è OK se f è strett. cresc.

$$f(A) > f(B) \Rightarrow A < B$$

$$f(A) \geq f(B) \Rightarrow A \leq B$$

sono OK con decrescenza opportuna, sempre se siamo all'interno degli insiemi di definizione.

— o — o —