

ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto

- Def. • Si dice che $\sup A = +\infty$ se A non è limitato superiormente.
- Si dice che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se A è limitato superiormente e L è il minimo dei maggioranti di A .
 - Si dice che $\inf A = -\infty$ se A non è limitato inferiormente.
 - Si dice che $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se A è lim. inf. e l è il massimo dei minoranti.

Per poter dare la definizione, serve accertarsi che il min. dei magg. (ed il max. dei minoranti) esistano.

Teorema Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$. Supponiamo che A sia limitato superiormente ($\exists$ maggiorante). Allora l'insieme dei maggioranti ammette minimo.

Dimo. Sia B l'insieme dei maggioranti.

Per ipotesi $B \neq \emptyset$.

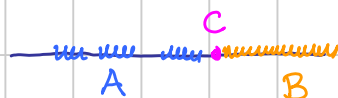
Per def. di maggioranti B sta a dx di A .

Per l'assioma di continuità esiste almeno un $c \in \mathbb{R}$ tale che

(i) $a \leq c \quad \forall a \in A$ (cioè c è un maggiorante, cioè $c \in B$)

(ii) $c \leq b \quad \forall b \in B$ (c è più piccolo di tutti gli el. di B)

Quindi (i) + (ii) $\Rightarrow c = \min B$. $\square$



Conseguenza Grazie all'assioma di continuità, tutti i sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$ hanno inf e sup (eventualmente $\pm \infty$).

- Oss.
- ① Inf e sup esistono per forza
 - ② Sono unici (sono min / max dei magg. / min.)
 - ③ Se $M = \max A$ esiste, allora M è anche sup.
Idem per inf e min.
 - ④ Se $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\sup A \in A$, allora è anche max.

Oss. burocratica (Inf e sup di $\emptyset$)

Sicuramente tutti i numeri reali sono magg. e minor. di $\emptyset$

Ci sono 2 possibili politiche

- dire che sup e inf non hanno senso se $A = \emptyset$ (buona idea, ma costringe tutte le volte che scrivo sup / inf a controllarne)
- dire che $\sup \emptyset = \text{"minimo dei maggioranti"} = -\infty$
 $\inf \emptyset = \dots = +\infty$
 (ma così $\sup < \inf$, il che è bruttissimo).

CARATTERIZZAZIONE DI INF E SUP

- ① Si ha che $\sup A = +\infty$ se



$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad \text{tale che} \quad a \geq M$$

↑ L'insieme A sceglie a dopo aver visto M

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad a \leq M$$

A è limitato

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad a > M$$

negazione

- ② Si ha che $\inf A = -\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad \text{t.c.} \quad a \leq M$$

- ③ Si ha che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se

(i) $a \leq L \quad \forall a \in A$ (questo dice che L è un maggiorante)

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \text{t.c.} \quad L - \varepsilon \leq a$

(che è come dire che $L - \varepsilon$ non va bene come maggiorante)

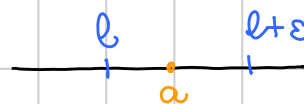


④ Si ha che $\sup A = l \in \mathbb{R}$ se

(i) $l \leq a \quad \forall a \in A$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \text{ t.c. } a \leq l + \varepsilon.$

— o — o —



Oss. Cosa vuol dire $\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A \ a \geq M$? $\sup A = +\infty$

" " "

$\exists a \in A \ \forall M \in \mathbb{R} \ a \geq M$?

ASSORDITÀ: a dovrebbe essere più grande di ogni M .

— o — o —

Esercizio (teorema) $\sup \mathbb{N} = +\infty$

[Dim.: sappiamo che $\sup \mathbb{N}$ esiste. Se non è $+\infty$, sarà un certo $L \in \mathbb{R}$.

Uso la caratterizzazione con

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ (o qualunque cosa < 1)

Allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $n_0 \geq L - \frac{1}{2}$



Ma allora $n_0 + 1 \geq L - \frac{1}{2} + 1 = L + \frac{1}{2} > L$

↑

(uso O-A-1)

Quindi ho trovato un elemento di $\mathbb{N}$, cioè $n_0 + 1$, che è $> L$, contro l'ipotesi che L sia un maggiorante.]

Oss. Diamo per buono che $1 > 0$. Allora $2 > 1$ (O-A-1).

Ma allora $1 > \frac{1}{2}$ (ho moltiplicato per l'inverso di 2).

— o — o —

Esercizio Siano A e B non vuoti e limitati superiormente.

$\sup (A \cup B) = \max \{ \sup A, \sup B \}$ (ma esisterà ?)

$\sup (A \cap B) \leq \min \{ \sup A, \sup B \}$

già potrebbe essere il $\emptyset$

← ma può essere minore stretto.

[Dimostrare !]

Lemma (sotto-esercizio) Se B è un insieme finito, allora max e min esistono.

[Dim. per induzione sul numero di elementi]

Esercizio $\sup (\text{unione qualunque}) = \sup \text{ dei } \sup.$
(il max potrebbe non esistere)

— o — o —