

INSIEMI NUMERICI

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Naturali

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

Interi (relativi) ZAHLEN

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

Razionali (quozienti)

 $\mathbb{R}$

Reali

$$\mathbb{C} = \{a+bi : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Complessi

— o — o —

Numeri reali : sono una quaterna $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$

che soddisfa tre tipi di assiomi

→ assiomi ALGEBRICI

→ assiomi di ORDINAMENTO

→ assioma di CONTINUITÀ

ASSIOMI ALGEBRICI

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un CAMPO, cioè un insieme su cui sono definite due operazioni $+$ e $\cdot$ con le solite proprietà

ASSIOMI DI ORDINAMENTO

$\geq$ è una relazione d'ordine totale su $\mathbb{R}$, cioè

$$(Ord 1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x \geq y \vee x \leq y$$

TOTALE

$$(Ord 2) \quad x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

RIFLESSIVA

$$(Ord 3) \quad \text{se } x \leq y \text{ e } y \leq z, \text{ allora } x \leq z$$

TRANSITIVA

$$(Ord 4) \quad \text{se } x \leq y \text{ e } y \leq x, \text{ allora } x = y$$

ANTISIMMETRICA

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ è un campo ordinato nel senso che l'ordine e le proprietà algebriche verificano due assiomi:

$$(O-A-1) \quad \text{se } x \geq y, \text{ allora } x+z \geq y+z \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

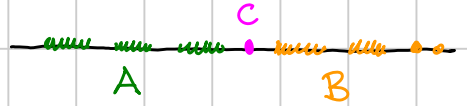
$$(O-A-2) \quad \text{se } x \geq y \text{ e } z \geq 0, \text{ allora } x \cdot z \geq y \cdot z \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Oss. Finora nulla distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$.

ASSIOMA DI CONTINUITÀ

Def. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi non vuoti. Si dice che A sta a sinistra di B se

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b$$



Assioma di cont.

Per ogni coppia di sottoinsiemi A e B con A che sta a sinistra di B , esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq c \leq b$$

← il c è lo stesso e
va bene per ogni
 a e b

Oss. Il separatore c può essere unico o no a seconda dei casi

Oss. Assioma di continuità in soli simboli

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \quad \forall B \subseteq \mathbb{R} \quad [\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b] \wedge A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \\ \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \quad (\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq c \leq b)$$

TEOREMA MISTERIOSO

Esiste un'unica quaterna $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ che verifica gli assiomi algebrici, di ordin. e di continuità.

Oss. Cosa vuol dire unicità? Se c'è un'altra struttura $(\boxed{\mathbb{R}}, \boxed{+}, \boxed{\cdot}, \boxed{\geq})$ con le stesse proprietà, allora esiste una funzione INVERTIBILE $f: \mathbb{R} \rightarrow \boxed{\mathbb{R}}$ che commuta con la struttura algebrica e l'ordin., cioè

$$f(x+y) = f(x) \boxed{+} f(y) \quad f(x \cdot y) = f(x) \boxed{\cdot} f(y)$$
$$x \leq y \Rightarrow f(x) \boxed{\leq} f(y) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Esercizio (Harol) Dimostrare l'unicità

Tante cose vere non sono scritte negli assiomi...

$$a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$(-1) \cdot (-1) = 1$$

$$1 \geq 0$$

} Anche loro te le dimostrano
(esercizi!)

Cosa che si usa e non è scritta (ma si deduce):

(O-A-2') Se $x \geq y$ e $z \leq 0$, allora $xz \leq yz$ per ogni $z \in \mathbb{R}$

Oss. Se risolvo $3x - 5 \geq 2$ uso solo gli assiomi

$$3x - 5 + 5 \geq 2 + 5$$

$$3x \geq 7$$

$$x \geq \frac{7}{3}$$

— 0 — 0 —

(esist. opposto + O-A-1)

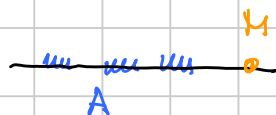
Molt. per $\frac{1}{3}$ e uso (O-A-2)

↑ siamo sicuri che è ≥ 0 ?

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto

Def. (Maggioranti e minoranti) Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A se

$$\forall a \in A \quad a \leq M$$



Si dice che $k \in \mathbb{R}$ è un minorante di A se

$$\forall a \in A \quad a \geq k$$

Def. (Insiemi limitati) Si dice che A è

- limitato superiormente se esiste almeno un maggiorante
- limitato inferiormente " " " " minorante
- limitato se è limitato sup. e inf.

Oss. I maggioranti non sono obbligati ad esistere, e quando esistono non sono mai unici

Def. (Massimo e minimo) Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di A , e si scrive

$$M = \max A$$

se

$$(i) \quad M \geq a \quad \forall a \in A \quad (\text{cioè } M \text{ è un maggiorante})$$

$$(ii) \quad M \in A.$$

Analogamente $m = \min A$ se

$$(i) \quad m \leq a \quad \forall a \in A$$

$$(ii) \quad m \in A$$

Oss. Max e min non sono obbligati ad esistere, nemmeno se A è limitato, ma se esistono sono unici.

[Dim. se fosse $M_1 = \max A$, $M_2 = \max A$, allora
$$\left. \begin{array}{l} M_1 \geq M_2 \quad (\text{pensando } M_1 \text{ come max}) \\ M_2 \geq M_1 \quad (\text{pensando } M_2 \text{ come max}) \end{array} \right\} \Rightarrow M_1 = M_2$$
]

Oss. Due definizioni analoghe di insieme limitato

$$\exists k \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad k \leq a \leq M$$

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad |a| \leq M.$$

↑ capire che sono la stessa cosa