

Iniettività, surgettività, grafici ed equazioni

Funzione $f: A \rightarrow B$. Dato $b \in B$, voglio risolvere l'equas.

$$\boxed{f(x) = b} \quad \text{cerco gli } x \in A \text{ t.c. } f(x) = b$$

(le sol. sarebbero $f^{-1}(\{b\})$)

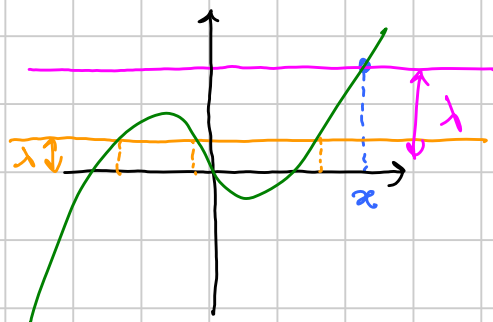
- Fatti**
- ① Se f è *surg.*, allora per ogni $b \in B$ c'è **ALMENO** una sol.
 - ② " f è *iniettiva*, " " " " " **AL MASSIMO** " "
 - (si dimostra per assurdo)
 - ③ Se f è *bigettiva*, allora $\forall b \in B$ esiste **UNICA** soluzione, e sarebbe $x = f^{-1}(b)$
- ↑ funzione inversa calcolata in b
(è la definizione di inversa)

Sia ora $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Come interpreto *iniett.* e *surg.* sul grafico?

Risolvere $f(x) = \lambda$ vuol dire intersecare il grafico con la retta $y = \lambda$ e prendere le x dei p.ti di intersec.

Quindi

- ① f è *surg.* se il grafico interseca tutte le rette // all'asse x in almeno un p.to (uno o +)
- ② ... *iniettiva* ... tutte le // in al massimo un p.to (0 o 1)



Se in partenza e/o arrivo ho sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, il discorso va adattato. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ no *inj.* no *surg.*

$$f(x) = x^2 \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \boxed{[0, +\infty]}$$

no *inj.*

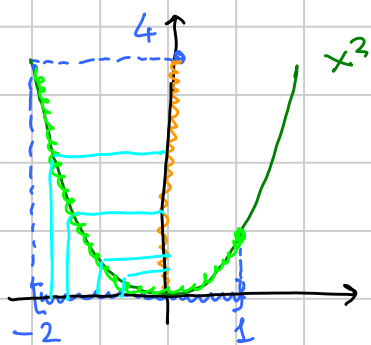
si *surg.*

penso solo alle eq.
 $f(x) = b$ con $b \geq 0$.



Come si interpretano immagine e controimmagine sul grafico?

$f(x) = x^2 \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Calcolare $f([-2, 1])$ e $f^{-1}([-2, 1])$
 $[0, 4]$ $[-1, 1]$

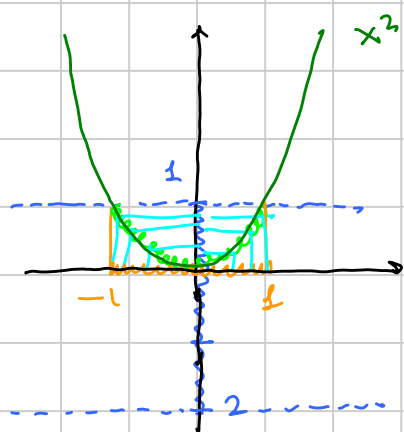


IMMAGINE

CONTROIMMAG.

Immagine:

Punto sull'asse $x \rightsquigarrow$ grafico $\rightsquigarrow$ asse y



Controimmagine

Punto asse $y \rightsquigarrow$ grafico $\rightsquigarrow$ asse x

— o — o —

E se fosse $f(x) = ||x^2 - 3| - 2|$ le cose in apparenza si complicano...

Operazioni sui grafici

$f(x) \rightsquigarrow f(x) + c$

Traslazione verticale
(su se c positivo)

$f(x) \rightsquigarrow f(x+c)$

Trasl. orizz.
(sx se c positivo)

$f(x) \rightsquigarrow -f(x)$

Simm. asse x

$f(x) \rightsquigarrow |f(x)|$

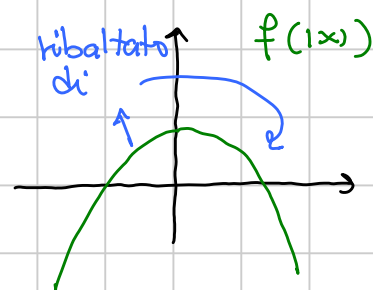
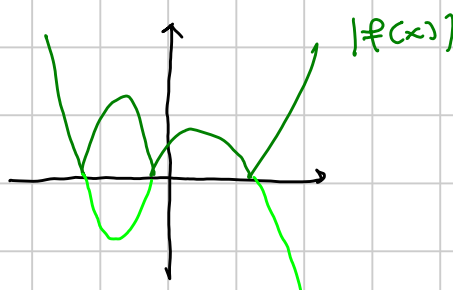
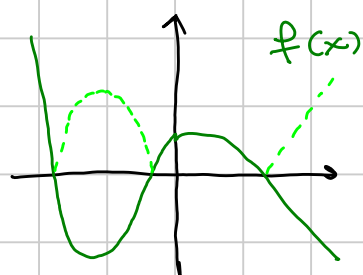
Ribalto in su le
parti negative

$f(x) \rightsquigarrow f(|x|)$

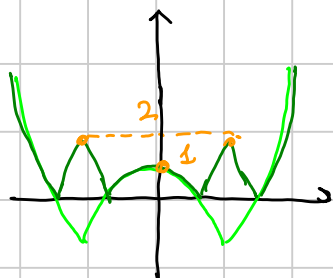
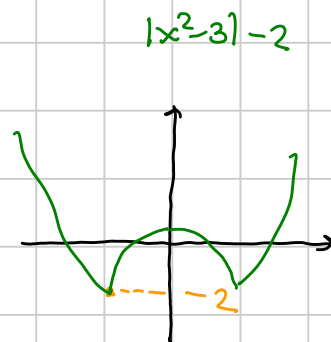
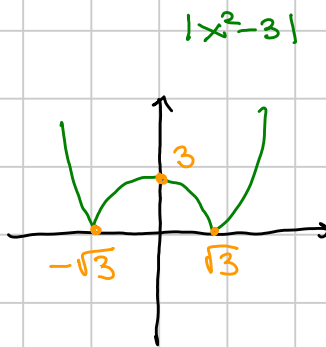
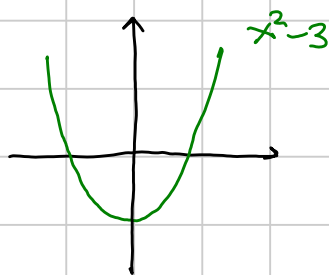
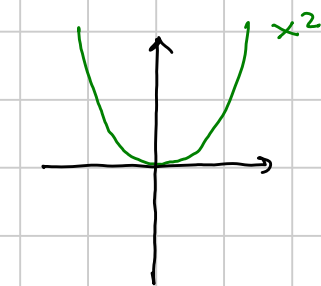
per $x \geq 0$ non cambia
nulla, per $x < 0$
ribalto gli $x \geq 0$

$f(x) \rightsquigarrow cf(x)$

Omotetia verticale
(con ribaltam. se $c < 0$)



$$f(x) = ||x^2 - 3| - 2|$$



— 0 — 0 —

Proprietà di simmetria Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

o anche un sottoinsieme

• PARI se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (grafico simm. wrt asse x)

with respect to

• DISPARI se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (grafico simm. wrt origine)
[teoremino: allora $f(0) = 0$]

• PERIODICA se $\exists T > 0$ t.c. $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Più form.

$$\exists T > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$$

↑ un periodo di f

Oss. Il periodo NON è unico (almeno tutti i multipli di T sono pure periodi).

Il più piccolo $T > 0$ che va bene (SE ESISTE) si dice minimo periodo.

Esercizio (Hard) È vero che esiste sempre un minimo periodo se f non è costante?

Esercizio (non provate a farlo) È vero che $\exists f$ e g periodiche t.c.
 $f(x) + g(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$?

— 0 — 0 —

Proprietà di MONOTONIA Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $\uparrow$ anche sottoinsieme.

Allora si dice

- STRETT. CRESC. se

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y > x \Rightarrow f(y) > f(x)$$

- DEBOLM. CRESCENTE se

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y > x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$$

In maniera analoga si definiscono strutt. / deb. decr.

$$y > x \Rightarrow f(y) < f(x)$$

$$y > x \Rightarrow f(y) \leq f(x)$$

Esercizio f str. decr. $\Rightarrow f \circ g$ str. cresc.
 g str. decr.

[Dim. $y > x \Rightarrow g(y) < g(x) \Rightarrow f(g(y)) > f(g(x))$]
 $\uparrow$ g decr. $\uparrow$ f decr.

Fare la stessa cosa mettendo cresc. / decr. nei vari modi possibili

Oss. ① Se voglio una debolm. cresc. che non sia strutt. cresc.
senza dei tratti piatti (costanti)

② Le funzioni strutt. monotone
(str. cresc. o decr.) sono
PER FORZA INIETTIVE

③ La monotonia c'entra poco con la cong.

