

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Sia $P(m)$ un predicato con parametro $m \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che

(i) $P(0)$ è vera

← passo base

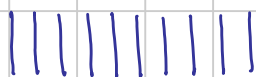
(ii) $\forall m \in \mathbb{N} [P(m) \text{ vera} \Rightarrow P(m+1) \text{ vera}]$

← passo induttivo

Allora $P(m)$ è vera per ogni $m \in \mathbb{N}$

Variazione: se sostituisco (i) con (i') $P(77)$ è vera, la tesi diventa $P(m)$ è vera $\forall m \geq 77$.

Interpretazione brutale: tessere del domino che cadono in success.



il passaggio induttivo è il meccanismo di caduta, il passo base la caduta della 0-esima tessera

Esempio 1

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

"
 $0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

Dim. esercizio

Esempio 2

$$\sum_{k=0}^n a^k \quad \text{con } a \text{ parametro}$$

"
 $1 + a + a^2 + \dots + a^n$

Formula

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad \text{se } a \neq 1$$

$$= n+1 \quad \text{se } a = 1$$

Dim. (nel caso $a \neq 1$)

Passo base $n=0$ diventa $1 = \frac{a-1}{a-1}$ Ok.

Passo induttivo $n \Rightarrow n+1$

Ipotesi: $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Tesi: $\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$

Dim. si fa una CATENA DI UGUAGLIANZE

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^n a^k + a^{n+1} \quad (\text{def. di sommatoria})$$

ipotesi
induttiva $\rightarrow$

$$= \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1}$$
$$= \frac{\cancel{a^{n+1}} - 1 + a^{n+2} - \cancel{a^{n+1}}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1} \quad (\text{Pecorso})$$

Primo = ultimo cui dà la tesi del passaggio induttivo,

— o — o —

Esempio 3 Det. per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha che $2^n \geq n^2$

↑ Risposta: $\forall n \in \mathbb{N}$
con $n \neq 3$

Esploro il problema:	$n=0$	$1 \geq 0$	Ok
	$n=1$	$2 \geq 1$	Ok
	$n=2$	$4 \geq 4$	Ok
	$n=3$	$8 \geq 9$	☹
	$n=4$	$16 \geq 16$	Ok
	$n=5$	$32 \geq 25$	Ok

più vado avanti, più diventa abbondante

Provo a dim. per induzione che $2^n \geq n^2 \quad \forall n \geq 4$

Dim. Passo base $n=4$ Ok

P.I. Ipotesi: $2^n \geq n^2$ Tesi: $2^{n+1} \geq (n+1)^2$

Dim. CATENA DI DISUGUAGLIANZE

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2 \geq (n+1)^2$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
precorso Hp. induttiva spero
 uolt. per 2

Se la speranza è vera, ho finito il passo induttivo.
Controllo la speranza:

$$2n^2 \stackrel{?}{\geq} (n+1)^2$$

$$\begin{aligned} 2n^2 \stackrel{?}{\geq} n^2 + 2n + 1 &\Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (n-1)^2 - 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow n-1 \geq 2 \\ &\Leftrightarrow n \geq 3 \end{aligned}$$

Quindi, la speranza è vera per ogni $n \geq 3$, quindi il passo induttivo è ok per ogni $n \geq 3$ e questo basta.

Oss. Il meccanismo di caduta funziona da 3 in poi



Esempio 4 DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dim. Passo base $n=0$ OK $(1 \geq 1)$

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $(1+x)^n \geq 1+nx$ Tesi: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Dim. $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$

uso Hp indutt. $\rightarrow \geq (1+x)(1+nx)$

$$= 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + \overset{\geq 0}{\boxed{nx^2}}$$

$$\geq 1 + (n+1)x$$

Ho usato Hp induttiva moltiplicata per $(1+x)$ senza cambiare il

verso: questo è ok se $(1+x) > 0$,
cioè se $x > -1$.

La dim. fatta funziona solo per $x > -1$

Vera Bernoulli:

$$\forall x > -1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$

$\uparrow$
reale

Esempio 5 Per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha che $n! \geq 2^n$

Esplorazione: $0! \geq 2^0$ ok

$1! \geq 2^1$ no

$2! \geq 2^2$ no

$3! \geq 2^3$ no

$4! \geq 2^4$ si

$5! \geq 2^5$ abbondante

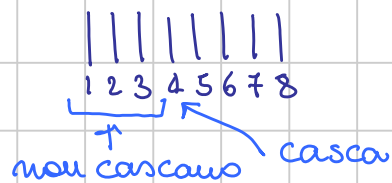
Congettura: vero per ogni $n \geq 4$

Dim. ..., arriviamo al passaggio induttivo...

$$(n+1)! \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di} \\ \text{fatt.}}}{=} (n+1)n! \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hp. indutt.} \\ \text{moltiplicata per} \\ (n+1) \text{ che è } > 0}}{\geq} (n+1) \cdot 2^n \geq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$\uparrow$
spero
 $\uparrow$
ok per $n \geq 1$

Con le tessere



il meccanismo è OK $\forall n \geq 1$

Esempio 6 Tutti gli studenti prendono lo stesso voto all' esame.

$P(n)$ = "dato un gruppo di n studenti, i suoi componenti prendono lo stesso voto all' esame"

Dim. Passo base $n=1$ è banale

Passo induttivo

H_p : vale per gruppi da n

H_n : vale per gruppi da $n+1$

Dim. prendo un gruppo da $n+1$



Per sovrapposizione, tutti sono costretti ad avere lo stesso voto.

Esercizio: cosa non va in questa dimostrazione?