

FUNZIONI TRA INSIEMI Cos'è una funzione?Operativamente sono 3 cose:

- un insieme di partenza A
- un insieme di arrivo B
- una "legge" che ad ogni elemento $a \in A$ assegna un unico elemento $b \in B$. Questo b si indica con $f(a)$

La funzione si indica come

$$f: A \rightarrow B$$

Grafico di una funzione: è il sottoinsieme di $A \times B$ definito da

$$\text{Grafico}(f) := \{ (a, b) \in A \times B : b = f(a) \}$$

Definizione formale di funzione Dati due insiemi A e B , una funzione $f: A \rightarrow B$ è un qualunque sottoinsieme $G \subseteq A \times B$ t.c.

$$\forall a \in A \exists ! b \in B \text{ [tale che]} (a, b) \in G$$

↑
fluidifica il discorso

Detto in altri termini, "una funzione è il suo grafico".

In questo setting, $f(a)$ è l'unico $b \in B$ t.c. $(a, b) \in G$.

— o — o —

Composizione di funzioni Data una $f: A \rightarrow B$ e data $g: B \rightarrow C$ si definisce la funzione composta $g \circ f: A \rightarrow C$ definita come

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

formalmente devono essere uguali

La funzione più interna è quella che si fa prima.

Esercizio di burocrazia Definire la composizione a partire dalla definizione formale

$$f: A \rightarrow B$$

$$g: B \rightarrow C$$

$$g \circ f: A \rightarrow C$$

$$G_f \subseteq A \times B$$

$$G_g \subseteq B \times C$$

$$G_{g \circ f} \subseteq A \times C$$

$$G_{g \circ f} = \{ (a, c) \in A \times C; \exists b \in B \text{ tale che } (a, b) \in G_f \wedge (b, c) \in G_g \}$$

Bisognerebbe ora dimostrare che $\forall a \in A \exists ! c \in C$ t.c. $(a, c) \in G_{g \circ f}$...

— o — o —

Si possono comporre anche più di 2 funzioni purché...

— o — o —

INIETTIVITÀ, SURGETTIVITÀ, BIGETTIVITÀ

Def. $f: A \rightarrow B$ si dice

- iniettiva se manda cose diverse in cose diverse, cioè

$$\forall a_1 \in A \forall a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

$$\forall a_1 \in A \forall a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

↪ equivalenti

- surgettiva se tutto B è raggiunto dalla funzione, cioè

$$\forall b \in B \exists a \in A \quad f(a) = b$$

- bigettiva se è iniettiva + surgettiva.

Funzione inversa Data $f: A \rightarrow B$, si dice inversa di f una funzione $g: B \rightarrow A$ tale che

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$

$$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$$

← inversa sinistra

← inversa destra

Teorema Sia data $f: A \rightarrow B$. Allora

- f è invertibile, cioè esiste l'inversa, se e solo se f è bigettiva.

Più precisamente

- * esiste l'inversa sinistra se e solo se f è iniettiva
- * esiste l'inversa destra se e solo se f è surgettiva.

Premissa: come si comportano iniettività e surg. con la composizione?

- ① Se f e g sono iniettive, allora $g \circ f$ è iniettiva

$$[\text{Dim.} : a_1 \neq a_2 \xRightarrow{f \text{ inj.}} f(a_1) \neq f(a_2) \xRightarrow{g \text{ inj.}} g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))]$$

- ② Se f e g sono surg., allora $g \circ f$ è surg.

$$[\text{Dim.} : c \in C \xRightarrow{g \text{ surg.}} \exists b \in B \quad g(b) = c \xRightarrow{f \text{ surg.}} \exists a \in A \quad f(a) = b]$$

$$\text{Ma allora } g(f(a)) = g(b) = c.]$$

- ③ Se $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva (la + inversa),
ma non nec. g .

[Dim. suppongo per assurdo f non iniettiva. Allora

$$\exists a_1 \in A \quad \exists a_2 \in A \quad \text{t.c.} \quad a_1 \neq a_2, \text{ ma } f(a_1) = f(a_2).$$

Ma allora $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, quindi $g \circ f$ non inj.,
contro l'ipotesi]

- ④ Se $g \circ f$ è surgettiva, allora g è surgettiva (la + esterna),
ma non necessariamente f .

[Dim. Sia $c \in C$. Allora $\exists a \in A$ t.c. $g(f(a)) = c$ (comp. surg.)

Posto $b = f(a)$ ho che $b \in B$ e $g(b) = c$.

Ho così trovato $b \in B$ t.c. $g(b) = c$].

IMMAGINE e CONTROIMMAGINE] Data $f: A \rightarrow B$

- per ogni $D \subseteq A$ si definisce l'immagine di D

$$\begin{aligned} f(D) &= \{ f(a) : a \in D \} \subseteq B \\ &= \{ b \in B : \exists a \in A \quad b = f(a) \} \end{aligned}$$

- per ogni $E \subseteq B$ si definisce la controimmagine di E

$$f^{-1}(E) = \{ a \in A : f(a) \in E \}$$

Si definisce immagine di una funzione l'insieme $f(A)$

Achtung! Il simbolo f^{-1} si usa per almeno 3 cose diverse

- la funzione inversa (quando esiste)
- la controimmagine (che esiste sempre)
- la funzione $\frac{1}{f}$ (quando ha senso farlo)

Il contesto aiuta a distinguere.