

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE

Titolo nota

15/12/2012

VF1 La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ converge

V

VF2 $x = 0$ è un punto di minimo relativo per la funzione $f(x) = \sinh x$

F

VF3 $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\arctan(x^{27}) \leq \lambda \forall x \in \mathbb{R}$

V

VF4 La funzione $f(x) = \sin^4 x$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, è periodica

V

VF5 La soluzione generale dell'equazione differenziale $u''' - 4u' = 0$ è $u(t) = ae^{2t} + be^{-2t}$

F

VF6 Si ha che $n^4 + \sin(n!) - 2^n \leq 0$ definitivamente

V

$a_n \rightarrow -\infty$
 $\Rightarrow a_n$ so defn.

VF7 $\log_7(1000^{1000}) = 3000 \log_7 10$

V

$1000^{1000} = 10^{3000}$

VF8 $\sin(2x) - x = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$

V

$\sin(2x) - x = 2x + o(x) - x$
 $= x + o(x)$

$\sum \frac{2^n}{n!}$ converge ad esempio per il rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2^n \cdot 2}{(n+1) n!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

VF2 Basta guardare il grafico

VF3 $\exists \lambda$ b.c. $\arctan(x^{1000}) \leq \lambda \forall x \in \mathbb{R}$

Basta prendere $\lambda = 525$ o $\lambda = \frac{\pi}{2}$

VF4 $f(x + 2\pi) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ 2π è un periodo

Domanda: qual è il periodo minimo? In questo caso π ...

VF5 $u''' - 4u' = 0$ $x^3 - 4x = 0$ $x(x^2 - 4) = 0$ $x = 0, 2, -2$

$$u(t) = ae^{2t} + be^{-2t} + c$$

MC1 Consideriamo l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 17\}$.

Determinare quale delle seguenti affermazioni sull'insieme A è vera.

- (A) $\inf A = \min A$ ^{NO} (B) $10 \in A$ ^{NO} (C) $\min A = 0$ ^{NO} (D) $\inf A = -\sqrt{17}$ ^{SI}
 (E) $\sup A = \max A$ ^{NO}

MC2 $\frac{5+i}{i^3} = \dots$

- (A) $-5i$ (B) $5i+1$ (C) $-5i+1$ (D) $5i-1$ (E) $5i$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 17\} \quad \text{Mondo } x: \text{ soluzioni della disequazione} \\ = (-\sqrt{17}, \sqrt{17})$$

MC2 $\frac{5+i}{i^3} = \frac{5+i}{-i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{5i-1}{1}$

MC3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(7x)}{x} = \dots$ $[\frac{0}{0}]$

- (A) 0 (B) 1 (C) ~~Non esiste~~, in quanto il limite per $x \rightarrow 0^+$ è diverso dal limite per $x \rightarrow 0^-$
 (D) 7 (E) $+\infty$

MC4 Sia $\alpha > 0$ un parametro reale. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{20^n + 1}{n^{20} + \alpha^n}$ converge se e solo se ...

- (A) $\alpha > 21$ (B) $\alpha \geq 21$ (C) $\alpha > 1$ (D) $\alpha \geq 20$ (E) ~~$\alpha > 20$~~

MC5 Se $f(x) = \cos(\sin x)$, allora $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dots$

$$f'(x) = -\sin(\sin x) \cdot \cos x$$

- (A) -1 (B) ~~0~~ (C) $-\cos 1$ (D) $\cos 1$ (E) 1

MC6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{9}{x} = \dots$

$$x \cdot \sin \frac{9}{x} \sim x \cdot \frac{9}{x} \sim 9$$

$$\frac{\sin \frac{9}{x}}{\frac{1}{x}} \sim \frac{\frac{9}{x}}{\frac{1}{x}} \sim 9$$

- (A) non esiste (B) $+\infty$ (C) ~~9~~ (D) $\frac{1}{9}$ (E) 0

$$\sum \frac{20^n + 1}{n^{20} + \alpha^n} \sim \frac{20^n}{\alpha^n} = \left(\frac{20}{\alpha}\right)^n$$

geometrica che converge $\Leftrightarrow \frac{20}{\alpha} < 1 \Leftrightarrow \alpha > 20$

MC7 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+4)^2} dx = \dots$

- (A) $+\infty$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{3}{4^3}$ (E) $\frac{3}{4^3}$

MC8 Consideriamo l'insieme $B = \{\sin x : x \leq 0\}$.

Determinare quale delle seguenti affermazioni sull'insieme B è falsa.

- (A) $\max B = 1$ (B) B è limitato inferiormente (C) B è limitato superiormente
(D) $5\pi \in B$ (E) $\min B = -1$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+4)^2} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{1}{(x+4)^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x+4} \right]_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\underset{\downarrow 0}{A+4}} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$B = \{\sin x : x \leq 0\} = [-1, 1]$$

= valori assunti da $\sin x$ quando $x \leq 0$



1. Dire se esiste, ed in caso affermativo calcolare, il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan x \cdot \arctan x} \left(e^{x^2} - \frac{1}{\cos x} \right).$$

Brutalmente

$$\begin{aligned} &\frac{\cos x \cdot e^{x^2} - 1}{\tan x \cdot \arctan x \cdot \cos x} \sim \frac{(1 - \frac{1}{2}x^2)(1+x^2) - 1}{x^2} \\ &= \frac{1 + x^2 - \frac{1}{2}x^2 - 1}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Rigoroso: sviluppare tutto di ordine 2.

2. Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

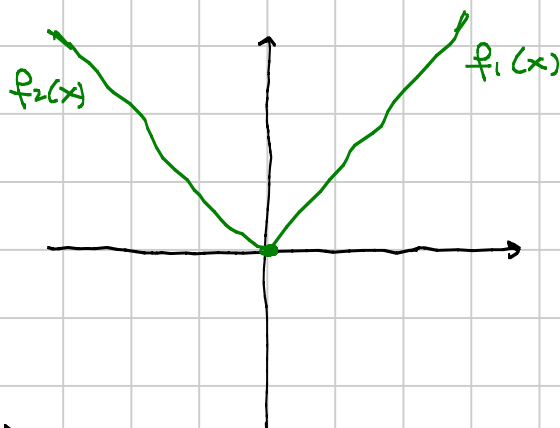
$$f(x) = |x| + \sin x = \lambda.$$

$\rightarrow 0$ soluzioni per $\lambda < 0$
 $\rightarrow 1$ soluzione per $\lambda = 0$
 $\rightarrow 2$ soluzioni per $\lambda > 0$

Valore assoluto $\Rightarrow$ Distinguo i casi

$$f(x) = \begin{cases} x + \sin x = f_1(x) & \text{se } x \geq 0 \\ -x + \sin x = f_2(x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Studio separatamente le 2 funzioni



$$f_1'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \quad e$$

$$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$$

annullamento sporadico

$$f_1'(x) \geq 0 \quad \text{sempre} + \text{annullamento sporadico}$$

$\Rightarrow$ stretta. crescente (monotonia 3)

$$f_2'(x) = -1 + \cos x \leq 0 \quad \text{sempre con annullamento} \Leftrightarrow \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi$$

$\Rightarrow f_2(x)$ è stretta. decrescente

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{1-x}} dx.$$

Pongo $y = \sqrt{1-x}$ quindi $y^2 = 1-x$
 quindi $x = 1-y^2$, quindi $dx = -2y dy$

$$= \int \frac{1-y^2+1}{y} (-2y) dy = -2 \int (2-y^2) dy \quad \text{occhio agli estremi!!}$$