

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 108

Titolo nota

15/12/2012

Esempio 1 Oscillatore armonico

$u(t)$ = posizione della pallina all'istante t

Equazione del moto

$$ma = f$$

↑ ↑
acceleraz. forza

Accelerazione : $u''(t)$

Forza = costante · allungamento = $\ominus k u(t)$

↑
la molla "richiama"
la pallina

Equazione diventa

$$m u''(t) = -k u(t)$$

Equazione lineare 2° ordine a coeff. costanti

$$u u'' + k u = 0$$

$$\leadsto m x^2 + k = 0 \quad \leadsto x = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i = \text{radici complesse coniugate}$$

perché k e m sono > 0 .

La soluzione sarà del tipo

$$u(t) = a \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + b \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

con a e b che dipendono dalle condizioni iniziali. Si tratta comunque di soluzioni limitate e periodiche di periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \text{ Vediamo se è ragionevole: Sì perché}$$

- k molto grande $\Rightarrow$ periodo molto piccolo $\Rightarrow$ oscillazioni molto veloci
 - m molto grande $\Rightarrow$ periodo molto grande $\Rightarrow$ oscillazioni molto lente.
- 0 — 0 —

Esempio 2 Oscillazioni forzate

$$\underbrace{u'' + u}_{m=k=1} = \underbrace{\sin(\omega t)}_{\uparrow \text{forza esterna}}$$

Cosa succede alla soluzione? Sarà del tipo

$$u(t) = \underbrace{a \cos t + b \sin t}_{\text{dipendono da cond. iniz}} + \underbrace{\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)}_{\text{si trovano } \lambda \text{ e } \mu \text{ in modo che sia solus. speciale}}$$

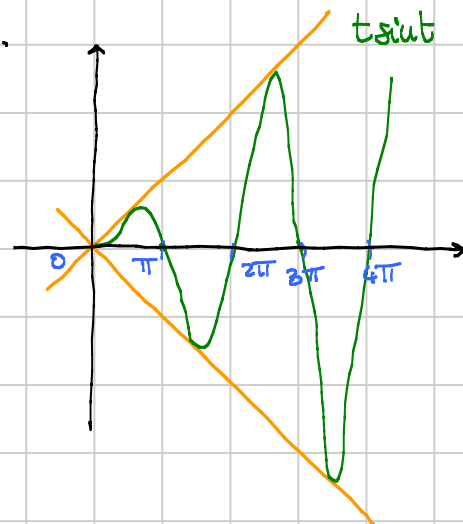
Essendo $u(t)$ somma di seni e coseni, sarà comunque per forza una soluzione limitata.

Tutto questo funziona per $\alpha \neq 1$. Per $\alpha = 1$ il tentativo da fare è diverso.

Per $\alpha = 1$ la soluzione è del tipo $u(t) = a \cos t + b \sin t + \lambda t \cos(t) + \mu t \sin(t)$

Per colpa della t la soluzione NON è più limitata.

Sta succedendo che la pallina ha oscillazioni sempre più ampie !!! La cosa succede solo se $\alpha = 1$, cioè se e solo se il periodo del termine forzante è lo stesso del sistema lasciato senza forze esterne.



Esempio 3

$$u'' + \alpha u' + u = 0$$

$$u'' = -\alpha u' - u$$

attrito che
"torna contro"
se $\alpha > 0$

forza di richiamo
elastica

Come sono fatte le soluzioni? Dipende dal Δ dell'equazione

• Caso $\Delta > 0 \Rightarrow$ ho 2 radici reali λ e μ e la soluzione generale è

$$u(t) = a e^{\lambda t} + b e^{\mu t}$$

$$x^2 + \alpha x + 1 = 0$$

Piccolo: $\lambda \mu = 1 \Rightarrow$ tutte e 2 positive oppure tutte e 2 negative
 $\lambda + \mu = -\alpha < 0 \Rightarrow$ tutte e 2 negative

$\Rightarrow u(t) \rightarrow 0$ esponenzialmente.

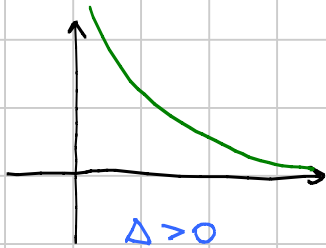
• Caso $\Delta < 0 \Rightarrow$ ho radici complesse coniugate $A \pm Bi$. La soluzione generale dell'equazione è

$$u(t) = a e^{At} \cos(Bt) + b e^{At} \sin(Bt).$$

La somma delle radici del polinomio è $2A = -\alpha \Rightarrow A < 0$

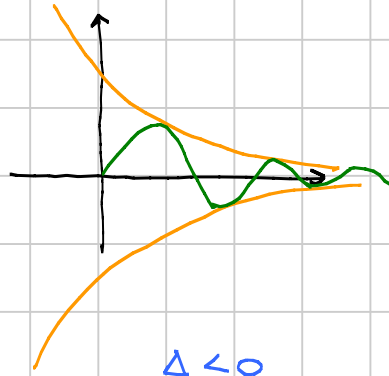
$\Rightarrow$ ancora una volta le soluzioni sono smorzate e tendono a 0 !!

L'andamento qualitativo nei 2 casi è diverso



$\Delta > 0$

Attivito molto forte



$\Delta < 0$

Attivito +
debole

$$\Delta = \alpha^2 - 4$$

Se $\alpha > 2$ si ha $\Delta > 0$

Se $\alpha \in (0, 2)$ si ha $\Delta < 0$

Domanda: è possibile ora ottenere soluzioni non limitate con un termine forzante del tipo $\sin(\alpha t)$?

No! Perché il tentativo con $\lambda \sin(\alpha t) + \mu \cos(\alpha t)$

fornisce sempre, dal momento che l'eq. omogenea non ha $\sin$ e $\cos$ PURI tra le sue soluzioni.