

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 107

Titolo nota

15/12/2012

Esempio 1 $u' + 2u = \arctan t$

Domanda: come si comportano le soluzioni per $t \rightarrow +\infty$?

Fatto 1: la soluzione è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$. Questo perché l'eq. è lineare, dunque se non hanno problemi i coeff. o il termine noto non li ha nemmeno la soluzione.

Fatto 2: posso vedere l'eq. come lineare del 1° ordine o come lineare a coeff. costanti.

Vedendola come lin. a coeff. costanti dovrai fare prima l'omog. $u' + 2u = 0$ e questa ha come solus. $u(t) = c e^{-2t}$ (polinomio: $x+2=0 \Rightarrow x=-2$)

Problema: come trovare una solus. speciale (tentativi non se ne vedono).

Variazione delle costanti: $u(t) = c(t) e^{-2t}$ $u' = c'(t) e^{-2t} - 2c(t) e^{-2t}$

Sostituendo trovo

$$c'(t) e^{-2t} - 2c(t) e^{-2t} + 2c(t) e^{-2t} = \arctan t$$

$$\text{Quindi } c'(t) = e^{2t} \cdot \arctan t \Rightarrow c(t) = \int e^{2t} \cdot \arctan t \, dt$$

Soluzione generale eq. non omogenea:

$$u(t) = \underbrace{c e^{-2t}}_{\substack{\text{sol. gen.} \\ \text{omogenea}}} + e^{-2t} \underbrace{\int e^{2t} \cdot \arctan t \, dt}_{\text{primitiva di } e^{2t} \cdot \arctan t}$$

Domanda: come calcolare il lim $u(t)$ senza avere una formula esplicita per la primitiva.

Funzioni integrali. Chiamo $F(t)$ una qualunque primitiva di $e^{2t} \cdot \arctan t$, ad esempio

$$F(t) = \int_0^t e^{2s} \arctan s \, ds$$

Domanda: calcolare $\lim_{t \rightarrow +\infty} \boxed{e^{-2t}} \boxed{F(t)}$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $0 \quad +\infty$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \int_0^{+\infty} e^{2s} \arctan s \, ds = +\infty$ per tante ragioni, ad esempio perché $e^{2s} \arctan s \geq 3/2$ per s abbastanza grande. (tende a $+\infty$)

Quindi il limite è una forma indeterminata.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(t)}{e^{2t}} \stackrel{\uparrow}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F'(t)}{2e^{2t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{2t} \cdot \arctan t}{2e^{2t}} = \frac{\pi}{4}$$

$[\frac{0}{\infty} = \text{H\ddot{o}p}]$

Di conseguenza: qualunque sia la condizione iniziale, dunque qualunque sia il valore di c , avremo che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \frac{\pi}{4}$$

Quindi la soluzione è sempre limitata per $t \rightarrow +\infty$.

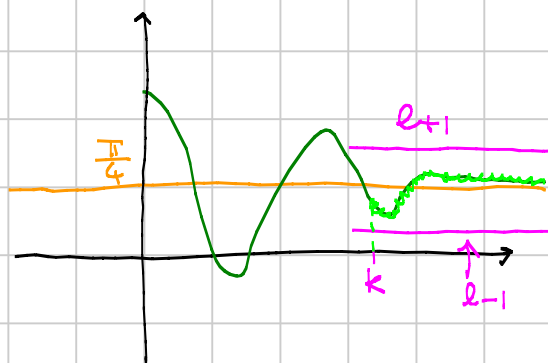
Fatto generale: se $u(t)$ è definita per $t \geq 0$, continua e tende ad un limite reale per $t \rightarrow +\infty$, allora $u(t)$ è limitata per $t \geq 0$.

Dim. rigorosa Visto che $f(x) \rightarrow l \in \mathbb{R}$,
 avremo che $l-1 \leq f(x) \leq l+1$ per x
 grandi. Dello stesso: $\exists k \geq 0$ b.c.

$$l-1 \leq f(x) \leq l+1 \quad \forall x \geq k$$

Nell'intervallo $[0, k]$ posso usare Weierstrass e ho

che $m \leq f(x) \leq M$. Quindi $f(x)$ è limitata per ogni $x \geq 0$.
 $\uparrow \quad \uparrow$
 minimo Massimo



Esempio 2 $u' - 2u = \arctan t$

Risolvendo come prima arriviamo alla formula generale

$$u(t) = c e^{2t} + e^{2t} \int_0^t e^{-2s} \arctan s \, ds$$

Ora $F(t) = \int_0^t e^{-2s} \arctan s \, ds$

Cosa succede a $u(t)$ quando $t \rightarrow +\infty$? Intanto esaminiamo

$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-2s} \arctan s \, ds$ e questo converge, ad esempio perché

↑
def. integrale
improprio

$$e^{-2s} \arctan s \leq \frac{\pi}{2} e^{-2s}$$

Ora $\int_0^{+\infty} e^{-2s} \, ds < +\infty$ (si fa la primitiva) $\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-2s} \arctan s \, ds < +\infty$

↑
confronto

Sia I il valore a cui converge l'imprio. Allora

$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \underbrace{e^{2t}}_{\rightarrow +\infty} \left(\underbrace{C + F(t)}_{C+I} \right)$ Tutto dipende dal valore di $C+I$

Nota bene: $C = u(0) =$ dato iniziale (sostituire $t=0$ nella formula per $u(t)$)

- Se $C+I > 0$, cioè se $u(0) > -I$, allora $u(t) \rightarrow +\infty$
- Se $C+I < 0$, cioè se $u(0) < -I$, allora $u(t) \rightarrow -\infty$
- Se $C+I = 0$, cioè se $u(0) = -I$, allora abbiamo una forma indetermin.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C + F(t)}{e^{-2t}} \stackrel{\uparrow}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F'(t)}{-2e^{-2t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^{-2t}} \cdot \arctan t}{-2 \cancel{e^{-2t}}} = -\frac{\pi}{4}$

[0/0: l'Hôpital]

Classico esempio di "VALORE SOGLIA" molto comune nelle equazioni differenziali:

- $\rightarrow u(0) > -1 \leadsto$ soluzione tende a $+\infty$
 - $\rightarrow u(0) < -1 \leadsto$ soluzione tende a $-\infty$
 - $\rightarrow u(0) = -1 \leadsto$ comportamento intermedio: soluzione tende a $-\frac{\pi}{4}$
- } Soluzione non
limitata
- (soluzione limitata!)

Oss. Quando tende a $\pm\infty$, lo fa esponenzialmente, quindi per esempio

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{2012}}{u(t)} = \begin{cases} 0 & \text{se } u(0) \neq -1 \\ -\infty & \text{se } u(0) = -1 \end{cases} \quad \left[\frac{+\infty}{-\frac{\pi}{4}} \right]$$