

Esercizio 1 Trovare le radici del polinomio $x^4 + 2x^2 + 2 = p(x)$

Su $\mathbb{R}$ non ci sono radici in quanto $p(x) \geq 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Su $\mathbb{C}$ ci devono per forza essere 4 radici, almeno se contate con molteplicità (achtung! possono essere disposte come gli spari nel piano di Gauss).

Devo risolvere $x^4 + 2x^2 + 2 = 0$. Pongo $y = x^2$: $y^2 + 2y + 2 = 0$

$$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i. \text{ Quindi ora devo risolvere}$$

$x^2 = -1+i$ e $x^2 = -1-i$. Quindi devo fare le 2 radici quadrate di $-1+i$ e le 2 radici quadrate di $-1-i$

$$-1+i = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$x_1 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{3\pi}{8}i}$$

radice del modulo argomento diviso per 2

$$x_2 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{11\pi}{8}i}$$

argomento precedente
+ $\pi = \frac{2\pi}{2}$

$$-1-i = \sqrt{2} e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

$$\leadsto x_3 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{5\pi}{8}i}$$

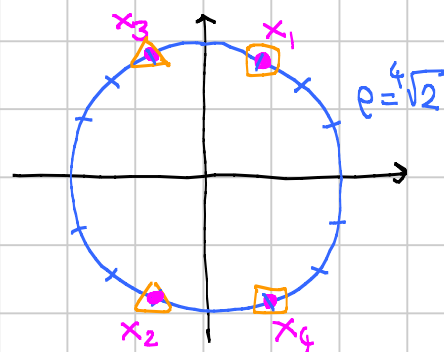
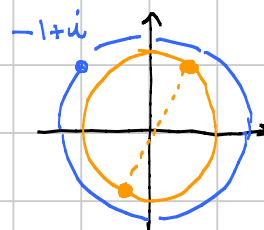
$$x_4 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{13\pi}{8}i}$$

Quindi ho 4 radici complesse distinte

Osservazioni: le radici sono a 2 a 2 coniugate, come prevedibile essendo il polinomio a coeff. reali

Dalle radici segue la fattorizzazione su $\mathbb{C}$

$$x^4 + 2x^2 + 2 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$



Se voglio fattorizzare su $\mathbb{R}$ accoppio le radici complesse coniugate

$$\begin{aligned}x^4 + 2x^2 + 2 &= (x - x_1)(x - x_4) \cdot (x - x_2)(x - x_3) \\&= (x - x_1)(x - \bar{x}_1) \cdot (x - x_2)(x - \bar{x}_2) \\&= (x^2 - 2\operatorname{Re}(x_1) \cdot x + |x_1|^2) \cdot (x^2 - 2\operatorname{Re}(x_2) \cdot x + |x_2|^2) \\&= (x^2 - \left[2\sqrt[4]{2} \cos \frac{3\pi}{8}\right]x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 - \left[2\sqrt[4]{2} \cos \frac{5\pi}{8}\right]x + \sqrt{2})\end{aligned}$$

Ho usato che $x_1 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{3\pi}{8}i} = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$

Esercizio 2 Risolvere $z + \bar{z} = \frac{1}{2}|z|$

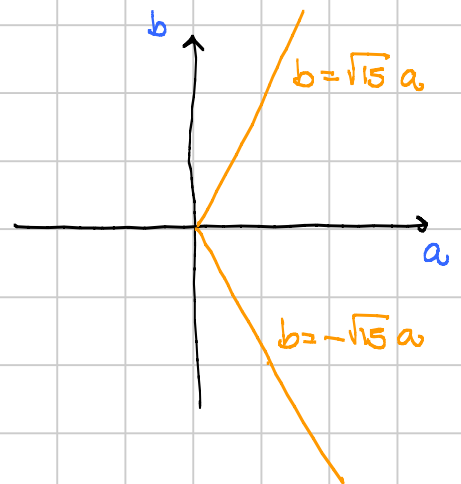
Uso forma cartesiana $z = a + bi$. Allora l'eq. diventa

$$2a = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow 4a = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow 16a^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 15a^2 = b^2$$

↑
devo aver imposto
 $a \geq 0$ prima di
fare il quadrato

Quindi $b = \pm \sqrt{15}a$, sempre con $a \geq 0$.

Quindi nel piano di Gauss sono 2 semirette (ho che $a \geq 0$) usanti dall'origine



Esercizio 3 Risolvere $z^4 = \bar{z}^2$

Si può fare in forma cartesiana, ma quella esponenziale è più comoda visto che ci sono potenze.

$$\begin{aligned}z &= \rho e^{i\theta} \\ \bar{z} &= \rho e^{-i\theta} \\ \underbrace{\rho^4 e^{4i\theta}}_{z^4} &= \underbrace{\rho^2 e^{-2i\theta}}_{\bar{z}^2}\end{aligned}$$

Impongo $\begin{cases} \rho^4 = \rho^2 \\ 4\theta = -2\theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ (stesso modulo)
(argomenti sfasati di $2k\pi$)

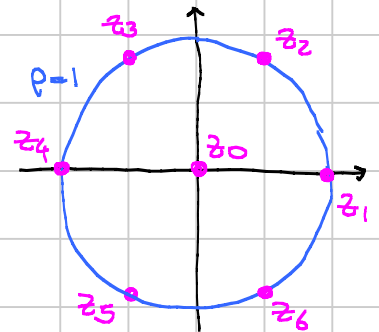
$\rho^4 = \rho^2$, $\rho^4 - \rho^2 = 0$, $\rho^2(\rho^2 - 1) = 0 \Rightarrow \rho = 0$ oppure $\rho = 1$
($\rho = -1$ si scarta in quanto $\rho \geq 0$)

Se $\rho = 0$, ottengo la soluzione $z_0 = 0$.

Se $\rho = 1$, cerco i possibili θ : $6\theta = 2k\pi$ $\theta = \frac{k\pi}{3}$ $k \in \mathbb{Z}$

Otengo 6 soluzioni con $k = 0, 1, \dots, 5$ e poi si ripetono

$z_1 = 1 \cdot e^{0i} = 1$, $z_2 = 1 \cdot e^{\frac{\pi i}{3}}$, $z_3 = 1 \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$, ...



Conclusione: l'equazione ha 7 soluzioni, che volendo sono $z_0 = 0$ più le 6 radici seste di 1.

Se serve, si possono scrivere facilmente in forma cartesiana, ad esempio $z_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Approccio alternativo Abbiamo $z^4 = \bar{z}^2$. Moltiplico a dx e sx per z^2 :
ottego

$$z^6 = \bar{z}^2 \cdot z^2 = (z \cdot \bar{z})^2 = |z|^4$$

Quindi ho ottenuto l'eq. $z^6 = |z|^4$. Ora faccio il modulo a dx

e sx $|z^6| = |z|^6$ uso che modulo prodotto = prodotto moduli

$|z|^4 = |z|^4$ perchè $|z|^4$ è un reale ≥ 0 .

Ho così ottenuto $|z|^6 = |z|^4$, cioè $\rho^6 = \rho^4$ da cui $\rho = 0$ opp. $\rho = 1$

Se $\rho = 0$ come prima.

Se $\rho = 1$ l'eq. $z^6 = |z|^4$ è diventata $z^6 = 1$, da cui è immediato che z sono le radici seste di 1.

— 0 — 0 —

Esercizio 4 Risolvere $z^6 = -|\bar{z}|$

Forma esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$ $|\bar{z}| = |z| = \rho$

$z^6 = \rho^6 e^{6i\theta}$ $-|\bar{z}| = -\rho$

Quindi verrebbe da scrivere

$$p^6 e^{6i\theta} = \boxed{-p}$$

↑ non è una forma esponenziale

$$= p \underbrace{e^{\pi i}}_{-1}$$

Ora posso procedere come sempre

$$\begin{cases} p^6 = p \\ 6\theta = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$p=0 \Rightarrow z=0 \text{ oppure}$$

$$p=1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \text{ e al variare di } k \text{ ottengo altre 6 soluzioni}$$

Una volta scoperto che $p=1$, l'equazione è diventata

$$z^6 = -p = -1, \text{ quindi ho le radici seste di } -1,$$

Volendo si scrivono in forma cartesiana.

