

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 105

Titolo nota

14/12/2012

SENO E COSENO IPERBOLICO IN $\mathbb{C}$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Scrivendo $z = a+bi$, si può espandere l'esponenziale complesso.

Caso speciale: Supponiamo che z sia immaginario puro $z = i\theta$

Sostituendo si ottiene

$$\cosh(i\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cancel{\cos\theta} + i\cancel{\sin\theta} + \cos\theta - i\cancel{\sin\theta}}{2} = \cos\theta$$

$$\sinh(i\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cancel{\cos\theta} + i\sin\theta - \cancel{\cos\theta} + i\sin\theta}{2} = i\sin\theta$$

SENO E COSENO DI UN NUMERO COMPLESSO

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\text{Quindi } \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Per estensione si definisce

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\text{Esempio } \sin(i) = \frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^1}{2i} = \frac{1}{i} \frac{e^{-1} - e^1}{2}$$

$$= \frac{1}{i} \sinh(-1) = -\frac{1}{i} \sinh 1$$

$$\left(\frac{1}{i} = -i\right)$$

$$= i \sinh 1$$

$$\cos(i) = \frac{e^{-1} + e^1}{2} = \cosh 1$$

Esempio 2 Risolvere l'equazione $\sin z = 2012$

Sui reali non ci sono soluzioni. Sui complessi ce ne sono infinite...

Uso la formula

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2012, \text{ quindi } e^{iz} - e^{-iz} = 4024i$$

Pongo $w = e^{iz}$ e l'equazione diventa $w - \frac{1}{w} = 4024i$

$$w^2 - 1 = 4024i w, \text{ cioè } w^2 - 4024i w - 1 = 0$$

Si tratta di una eq. di 2° grado in w che risolvo con la formula

$$w_{1,2} = 2012i \pm \sqrt{-2012^2 + 1}$$

$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = (2012i)^2 + 1$$

$$= (2012 \pm \sqrt{2012^2 - 1}) i$$

Quindi per w ho trovato 2 soluzioni immaginarie pure:

$$w_1 = Ai \quad w_2 = Bi \quad \text{con } A = 2012 + \sqrt{2012^2 - 1}, \quad B = 2012 - \sqrt{2012^2 - 1}$$

$\downarrow \in \mathbb{R} \quad \quad \downarrow \in \mathbb{R}$

Ora devo risolvere $e^{iz} = w_1$ $e^{iz} = w_2$
cioè devo fare i logaritmi complessi.

$$e^{iz} = Ai = A e^{\frac{\pi}{2}i} \Rightarrow r = A, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ da cui}$$

$$a = \log A \quad b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ quindi } iz = a + bi = \log A + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i$$

da cui $z = -\log A \cdot i + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Analogamente da w_2 trovo

$\uparrow$
dividere per i

= moltiplicare per $-i$

$$z = -\log Bi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi i$$

Se andiamo a disegnare le soluzioni nel piano di Gauss troviamo due successioni infinite di punti.

Ora

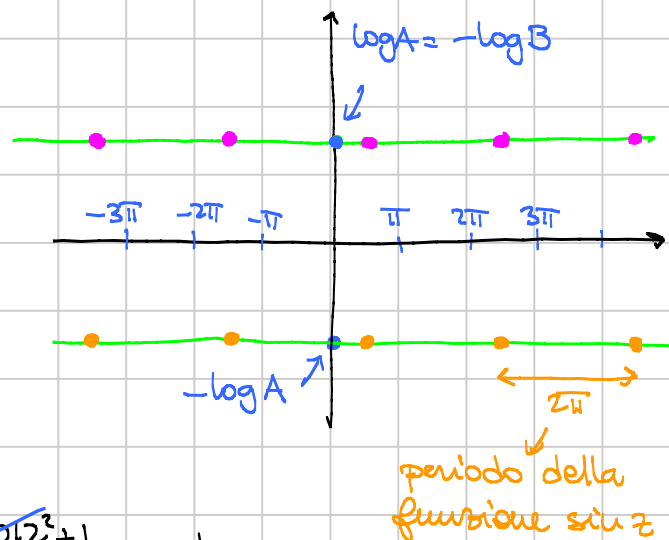
$$A = 2012 + \sqrt{2012^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \log A > 0$$

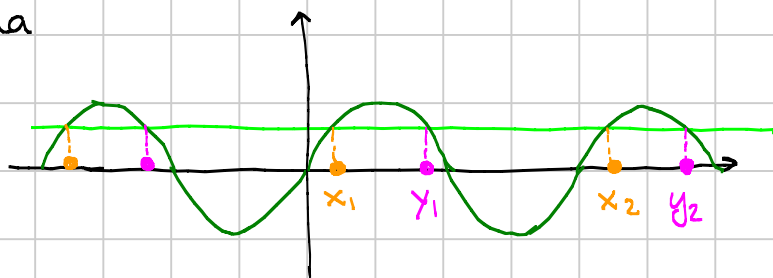
$$B = 2012 - \sqrt{2012^2 - 1}$$

$$= (2012 - \sqrt{\dots}) \frac{2012 + \sqrt{\dots}}{2012 + \sqrt{\dots}} = \frac{2012^2 - 2012^2 + 1}{2012 + \sqrt{\dots}} = \frac{1}{A}$$

$$B = \frac{1}{A} \Rightarrow \log B = -\log A$$



Osservazione Sui reali, quando risolviamo $\sin x = \lambda$ con $\lambda \in (-1, 1)$ troviamo 2 famiglie infinite di soluzioni, entrambe ottenute traslando una "prima soluzione" di multipli di 2π



Quale relazione c'è tra x_1 e y_1 ?

La relazione è $y_1 = \pi - x_1$, quindi i termini della seconda famiglia sono π - termini della 1ª famiglia

La stessa cosa è successa in ambito complesso. Infatti

$$1^a \text{ famiglia} = -\log A \cdot i + \frac{\pi}{2} + 2k\pi i$$

$$\begin{aligned} \text{Faccio } \pi - 1^a \text{ famiglia} &= \pi + \log A \cdot i - \frac{\pi}{2} - 2k\pi \\ &= \log A \cdot i + \frac{\pi}{2} - 2k\pi \\ &= -\log B \cdot i + \frac{\pi}{2} - 2k\pi \end{aligned}$$

folte le i dopo video.

Ho usato che
 $-\log A = \log B$

segno + o - è la stessa cosa perché $k \in \mathbb{Z}$.

Oss. lo stesso procedimento mostra che $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$, viste come $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, sono surgettive, ma non iniettive in quanto periodiche!