

# ESPONENZIALE E LOGARITMO COMPLESSO $e^z \quad z \in \mathbb{R}$

Def. Se  $z = a + bi$ , allora  $e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$

$$e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Quindi  $e^{a+bi}$  è un numero complesso che ha come modulo  $e^a$  e come argomento  $b$ .

Esempio 1  $e^{7-5i} = e^7 (\cos(-5) + i \sin(-5)) = e^7 (\cos 5 - i \sin 5)$

Sorpresa:  $z \rightarrow e^z$  è una funzione periodica nel senso che

$$e^{z+2\pi i} = e^z \quad (\text{il periodo è } 2\pi i)$$

Dim. Se  $z = a + bi$ , allora  $e^{z+2\pi i} = e^{a+(b+2\pi)i} =$  (uso definizione)

$$= e^a (\cos(b+2\pi) + i \sin(b+2\pi)) = e^a (\cos b + i \sin b) = e^z.$$

Esempio 2  $e^i = e^{0+i} = e^0 (\cos 1 + i \sin 1) = \cos 1 + i \sin 1$

Interpretazione con le serie Supponiamo di voler definire  $e^{i\theta}$ .

Sui reali avevamo che

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

corretto dopo video

Poniamo  $x = i\theta$ . Diventa (ricordando che  $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$ )

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{5!}i\theta^5 - \frac{1}{6!}\theta^6 - \frac{1}{7!}i\theta^7 + \dots$$

=  $\cos \theta + i \sin \theta$

aggiunto dopo video

## LOGARITMO COMPLESSO

Dato un numero  $w \in \mathbb{C}$ , cercare il logaritmo di  $w$  vuol dire cercare i numeri complessi  $z$  tali che  $e^z = w$

### Fatto generale

- Se  $w = 0$ , allora non esiste nessuno  $z \in \mathbb{C}$  t.c.  $e^z = 0$
  - Se  $w \neq 0$ , allora esistono infiniti  $z \in \mathbb{C}$  t.c.  $e^z = w$ .
- Quindi il logaritmo non è unico: le infinite soluzioni si ottengono da una delle altre per via della periodicità della funzione  $e^z$ .

### Dato $w$ , come si calcolano i possibili $z$

Si scrive  $w$  in forma esponenziale e  $z$  in forma cartesiana.

$$w = r e^{i\varphi} \quad z = a + bi \quad \text{Impongo } e^z = w$$

$$e^{a+bi} = r e^{i\varphi} \quad ; \quad \boxed{e^a} \cdot e^{bi} = \boxed{r} \cdot e^{i\varphi}$$

$$\begin{cases} e^a = r & (\text{stesso modulo}) \\ b = \varphi + 2k\pi & (\text{stesso argomento a meno di multipli interi di } 2\pi) \end{cases}$$

Quindi

$$\boxed{a = \log r}$$

↑  
se  $w \neq 0$ , allora  $r > 0$  e questo è il log di numeri reali  $> 0$

$$\boxed{b = \varphi + 2k\pi}$$

↑  
Al variare di  $k \in \mathbb{Z}$  fornisce le infinite soluzioni.

Esempio 1 Risolvere sui complessi  $e^z = 1$ . Applico la formula. Devo trovare  $r$  e  $\varphi$  scrivendo  $w$  (che sarebbe 1) in forma esponenziale

$$1 = 1 \cdot e^{0i} \Rightarrow r = 1, \varphi = 0$$

Allora le soluzioni sono  $z = a + bi$  con

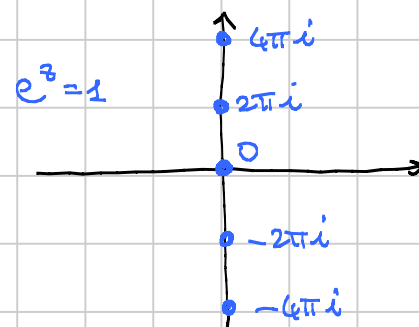
$$a = \log 1 = 0$$

$$b = \varphi + 2k\pi = 2k\pi$$

le soluzioni sono

$$z = 2k\pi i$$

Quindi ho la soluzione  $z=0$ , che ovviamente mi aspettavo essendo la soluzione reale di  $e^z=1$  più tutte le sue traslate di  $2\pi i$ .  
 Nel piano di Gauss queste soluzioni sono infiniti punti sull'asse immaginario



Esempio 2 Risolvere  $e^z = -1$   
 Sui reali non ci sarebbero soluzioni.  
 Sui complessi sì. Scrivo  $-1$  in forma esponenziale:

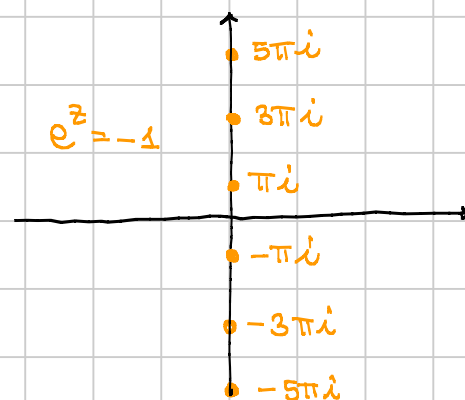
$$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$$

Quindi  $r=1$  e  $\varphi=\pi$ . Allora

$$a = \log 1 = 0 \quad e \quad b = \pi + 2k\pi$$

Quindi le soluzioni sono

$$z = a + bi = (\pi + 2k\pi) i$$



Esempio 3  $e^z = -\sqrt{3} + i$

Scrivo  $-\sqrt{3} + i$  in forma esponenziale.

$$|-\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2, \text{ quindi}$$

$$-\sqrt{3} + i = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \cdot e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

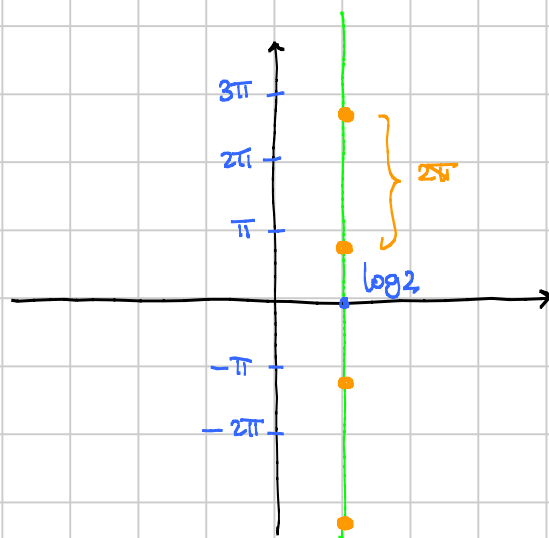
$\swarrow$   $\cos \frac{5\pi}{6}$        $\nwarrow$   $\sin \frac{5\pi}{6}$

Allora  $r=2$  e  $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ . Dalla formula per il logaritmo otteniamo che

$$a = \log 2 = \log 2, \quad b = \varphi + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Le soluzioni sono  $z = \log 2 + \left( \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right) i$

$a + bi$



Esempio 4 Risolvere  $e^z = -5 + 7i$

Devo scrivere  $-5 + 7i$  in forma esponenziale

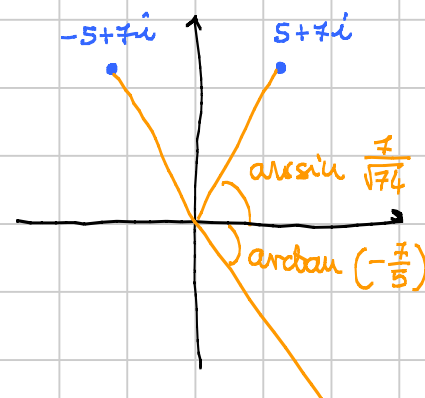
$$r = |-5 + 7i| = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$$

$$-5 + 7i = \sqrt{74} \left( -\frac{5}{\sqrt{74}} + i \frac{7}{\sqrt{74}} \right)$$

$\uparrow$   $\cos \theta$        $\uparrow$   $\sin \theta$

Il  $\theta$  corrispondente non è un angolo notevole.

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{7}{5} \leadsto \theta = \underbrace{\arctan\left(-\frac{7}{5}\right)}_{\substack{\text{corrispondente} \\ \text{angolo nel 4°} \\ \text{quadrante}}} + \pi$$



Quali delle seguenti formule è corretta?

$\theta = \arcsin\left(\frac{7}{\sqrt{74}}\right)$  NO! arcsin non dà valori nel 2° quadrante

$\theta = \arccos\left(-\frac{5}{\sqrt{74}}\right)$  OK! arccos fornisce valori in  $[0, \pi]$

Conclusione esercizio:  $a = \log r = \log \sqrt{74} = \frac{1}{2} \log 74$

$$b = \arccos\left(-\frac{5}{\sqrt{74}}\right) + 2k\pi \quad \text{oppure}$$

$$b = \arctan\left(-\frac{7}{5}\right) + \pi + 2k\pi$$