

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 103

Titolo nota

13/12/2012

Polinomi a coeff. complessi $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad a_i \in \mathbb{C}$

Se sostituisco uno $z \in \mathbb{C}$ ottengo a sua volta un numero complesso.

Def. Dato un polinomio $p(z)$ a coeff. complessi, si dice che $\alpha \in \mathbb{C}$ è radice se $p(\alpha) = 0$.

Fatto generale: se α è radice di $p(z)$, allora $p(z)$ è divisibile per $z - \alpha$, cioè si può scrivere

$$p(z) = (z - \alpha) \underbrace{q(z)}_{\substack{\uparrow \\ \text{polinomio a coeff. complessi}}}$$

Def. Si dice che α è radice di $p(z)$ di multiplicità m se $p(z)$ è divisibile per $(z - \alpha)^m$ e non è divisibile per $(z - \alpha)^{m+1}$.

Teorema fondamentale dell'algebra

(di grado n ,

Versione radici: ogni polinomio $p(z)$ a coeff. complessi ha esattamente n radici complesse, se contate con molteplicità.

Versione fattorizzazione: ogni polinomio $p(z)$ a coeff. complessi di grado n si può scrivere come prodotto di esattamente n fattori di grado 1, eventualmente ripetuti (i fattori che si ripetono corrispondono a radici con molteplicità > 1).

$$p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z - \alpha_1) \cdot (z - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (z - \alpha_n)$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono le radici, eventualmente ripetute

Oss. Basta dim. che ogni polinomio ha ALMENO una radice per dire che ne ha ESATTAMENTE n !

$$p(z) = \underbrace{(z - \alpha_1)}_{\substack{\uparrow \\ p \text{ ha radice}}} q(z) = (z - \alpha_1) \underbrace{(z - \alpha_2)}_{\substack{\uparrow \\ q \text{ ha radice}}} r(z) \text{ e così via } \dots$$

Cosa succede se il polinomio ha coeff. reali

Continua ad essere vero che ha esattamente n radici COMPLESSE, e quindi sui complessi si scrive come prodotto di n fattori di 1° grado. Non è detto che le radici siano reali.

Fatto generale. Sia $p(x)$ un polinomio a coeff. reali.

Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è radice di $p(x)$, allora anche $\bar{\alpha}$ è radice di $p(x)$.

Se α ha molteplicità m , anche $\bar{\alpha}$ ha molteplicità m .

a coeff. reali

Di conseguenza le radici di $p(x)$ sono di 2 tipi

→ radici reali

→ coppie di radici complesse coniugate.

Consideriamo una coppia di radici complesse coniugate: $a+bi$, $a-bi$ ($b \neq 0$).

Mettiamo insieme i 2 fattori che producono nella fattorizzazione

$$\begin{aligned}(x - (a+bi))(x - (a-bi)) &= x^2 + x(-a+bi - a-bi) + (a+bi)(a-bi) \\ &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)\end{aligned}$$

I due fattori erano a coeff. complessi, ma il loro prodotto è a coeff. reali.

Teorema Ogni polinomio $p(x)$ a coeff. reali è prodotto di fattori di 1° o 2° grado a coeff. reali.

→ I fattori di 1° grado corrispondono alle radici reali

→ I fattori di 2° grado si ottengono mettendo insieme a 2 a 2 i fattori complessi relativi a coppie di radici complesse coniugate.

Dim. che α radice $\Rightarrow \bar{\alpha}$ radice $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad a_i \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\alpha \text{ radice} \Rightarrow p(\alpha) = 0 &\Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i = 0 = \sum_{i=0}^n \bar{a}_i \bar{\alpha}^i \\ &= \sum_{i=0}^n a_i \bar{\alpha}^i = p(\bar{\alpha}) = 0 \Rightarrow \bar{\alpha} \text{ radice.}\end{aligned}$$

Esempio $p(x) = x^4 + 1$ Non ha radici reali.

Ha per forza 4 radici complesse, se contate con molteplicità.

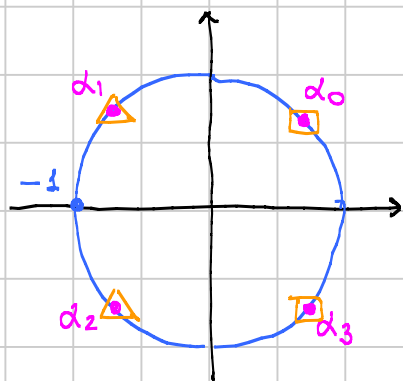
Per trovarle risolvo $x^4 = -1$, che vuol dire trovare le radici quarte di -1 .

$$-1 = 1 \cdot e^{i\pi} \Rightarrow \text{una radice quarta è } \alpha_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

In forma cartesiana

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad \alpha_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\alpha_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad \alpha_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$



Ora posso scrivere la fattorizzazione sui complessi:

$$x^4 + 1 = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$$

$$= \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

Per avere la fattorizzazione sui reali accoppio i fattori provenienti da coppie di radici coniugate

$$x^4 + 1 = (x - \alpha_0)(x - \alpha_3) \cdot (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

$$\begin{aligned} (x - \alpha_0)(x - \alpha_3) &= (x - \alpha_0)(x - \bar{\alpha}_0) = x^2 - (\alpha_0 + \bar{\alpha}_0)x + \alpha_0 \bar{\alpha}_0 \\ &= x^2 - 2 \operatorname{Re}(\alpha_0)x + |\alpha_0|^2 \\ &= x^2 - \sqrt{2}x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Analogamente: } (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) &= (x - \alpha_1)(x - \bar{\alpha}_1) \\ &= x^2 - 2 \operatorname{Re}(\alpha_1)x + |\alpha_1|^2 \\ &= x^2 + \sqrt{2}x + 1 \end{aligned}$$

Altro esempio. Fattorizzazione sui reali $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = p(x)$

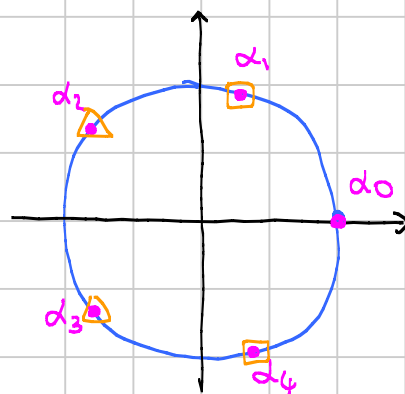
Passo dai complessi, quindi cerco le radici complesse.

$$(x^5 - 1) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

Quindi le radici del $p(x)$ dato sono le radici di $x^5 - 1$ meno la radice $x = 1$. Le radici di $x^5 - 1$ sono le radici complesse quinte di 1, quindi sono 1 + le 4 che completano il pentagono

$$\alpha_k = e^{\frac{2k\pi i}{5}}$$

Per ottenere la fattorizzazione sui reali devo accoppiare



$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_4) = (x - \alpha_1)(x - \bar{\alpha}_1) = x^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)x + 1$$

$$(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = \dots = x^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)x + 1$$

[Esercizio: mettere i passaggi mancanti].