

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 102

Titolo nota

13/12/2012

Forma cartesiana: $a+bi \rightsquigarrow$ comoda per questioni additive

Forma trigonometrica: $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$
 Forma esponenziale: $\rho e^{i\theta}$ } $\rightsquigarrow$ comode per questioni moltiplicative

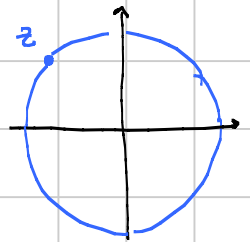
Potenza n-esima $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

$$z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

Esempio 1 $(i - \sqrt{3})^{22}$ $\rightsquigarrow$ scriverlo in forma cartesiana

Passiamo attraverso la forma esponenziale, $z = i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + i$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = 2$$



$$z = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$= 2 e^{\frac{5\pi}{6} i}$$

risposta in forma esponenziale

$$z^{22} = 2^{22} e^{\frac{5\pi}{6} i \cdot 22} = 2^{22} e^{\frac{55\pi}{3} i} = 2^{22} e^{(18\pi + \frac{\pi}{3}) i} = 2^{22} e^{\frac{\pi}{3} i}$$

$55 = 54 + 1$
 $= 3 \cdot 18 + 1$

$$= 2^{22} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

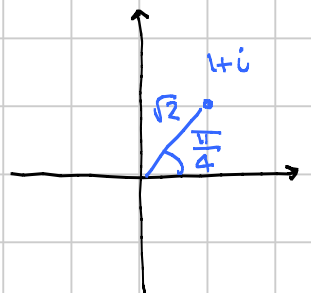
$$= 2^{22} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 2^{21} + 2^{21} \sqrt{3} i \rightsquigarrow \text{risposta in forma cartesiana}$$

Esempio 2 $(1-i)^{-7} = \left(\frac{1}{1-i} \right)^7 = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}(1+i)$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4} i} \quad \text{Elevo alla settima}$$

$$\frac{1}{16} - \frac{i}{16}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^7 e^{\frac{7\pi}{4} i} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)$$



Radici n -esime di un numero complesso

Sia a un numero complesso. Trovare LE radici n -esime di a vuol dire trovare TUTTI i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^n = a$.

Questo problema ha

→ unica soluzione $z=0$ se $a=0$

→ se $a \neq 0$ ci sono esattamente n soluzioni che rappresentate nel piano di Gauss sono i vertici di un poligono regolare di n lati con il centro nell'origine.

Dim. Scrivo a e z in forma esponenziale: $a = r e^{i\varphi}$ DATO
 $z = \rho e^{i\theta}$ DA TROVARE

Impongo $z^n = a$, cioè

$\rho^n e^{in\theta} = r e^{i\varphi}$ Ora due numeri complessi scritti in forma esponenziale sono uguali se e solo se hanno lo stesso modulo e argomenti che differiscono per multipli interi di 2π . Quindi

$$\rho^n = r$$

$$n\theta = \varphi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

$$\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k}{n}\pi$$

si intende l'unica radice n -esima REALE ≥ 0

Dando a k i valori $0, 1, 2, \dots, n-1$ ottengo n soluzioni che sono distinte se $\rho \neq 0$. Queste soluzioni hanno gli argomenti sfasati di $\frac{2\pi}{n}$, il che produce il poligono regolare.

Se a k sostituisco valori successivi o precedenti riottengo le stesse soluzioni. Ad esempio:

$$k = n \rightsquigarrow \theta = \frac{\varphi}{n} + 2\pi \rightsquigarrow \text{stessa cosa di } k=0$$

$$k = n+1 \rightsquigarrow \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2n+2}{n}\pi = \frac{\varphi}{n} + \underbrace{2\pi}_{\text{inutile}} + \frac{2\pi}{n} \rightsquigarrow \text{stessa cosa di } k=1$$

Quindi le n radici n -esime di a stanno tutte sulla stessa circonferenza di raggio ρ e centro in O , e argomenti sfasati di $\frac{2\pi}{n}$.

— o — o —

Achtung! Non confondere mai:

→ LA radice n -esima di un numero reale ≥ 0 (è unica ed è definita come l'inverso della funzione x^n che è bigettiva...)

→ LE radici n -esime in ambito complesso, che sono TUTTE le soluzioni...

Esempio $\sqrt{4}$ si intende la radice sui reali, quindi $\sqrt{4} = 2$

Il numero complesso $a = 4$ ha 2 radici quadrate: $z = 2$ e $z = -2$

Esempio 1 Scrivere in forma cartesiana le 3 radici cubiche complesse di $8i$

Devo risolvere $z^3 = 8i$

Passo dalla forma esponenziale: $8i = 8e^{\frac{\pi}{2}i}$ $z = \rho e^{i\theta}$

$$z^3 = \rho^3 e^{i3\theta} = 8e^{\frac{\pi}{2}i} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt[3]{8} = 2 \quad (\text{radice cubica reale})$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \cdot \frac{1}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

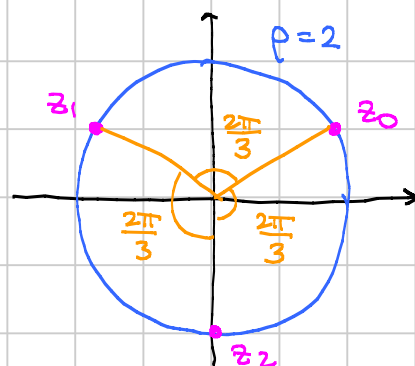
$$k=0 \rightsquigarrow \theta_0 = \frac{\pi}{6} \quad k=1 \rightsquigarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$k=2 \rightsquigarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}. \text{ Le 3 soluzioni sono}$$

$$z_0 = 2e^{\frac{\pi}{6}i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2e^{\frac{5\pi}{6}i} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$



Modo alternativo: $a = 8i \Rightarrow |a| = 8 \Rightarrow |z| = 2$

Argomento di $a = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ la prima radice avrà argomento $\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$

Le altre 2 radici saranno sfasate di $\frac{2\pi}{3}$,

Exemplo 2

Calcolare le radici seste di $-i = a$ (risolvere $z^6 = -i$)

$$|a| = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

Argomento di $a = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ una radice avrà
argomento

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

La prima radice è $z_0 = 1 \cdot e^{\frac{0}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Le altre 5 saranno sfasate di $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Quindi

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3}, \quad \theta_4 = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}, \quad \theta_5 = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = \frac{23\pi}{12}$$

