

Numeri complessi: forma trigonometrica

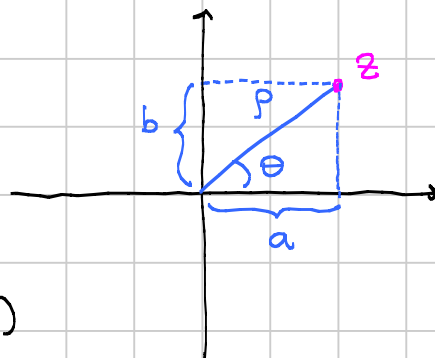
$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

dove

→ ρ è la distanza di z dall'origine ($\rho = |z|$)

→ θ è quello che si chiama argomento di z , cioè l'angolo che la retta passante per 0 e z forma con il semiasse reale positivo

Quindi

 $\rho \geq 0$ reale θ è un angolo

Formule di passaggio

$$a = \rho \cos \theta$$

$$b = \rho \sin \theta$$

conosco ρ e θ
voglio a e b

Viceversa, se conosco a e b , allora $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, mentre per θ è meglio guardare il disegno.

Achtung! $\frac{b}{a} = \frac{\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta} = \tan \theta$, da cui apparentemente

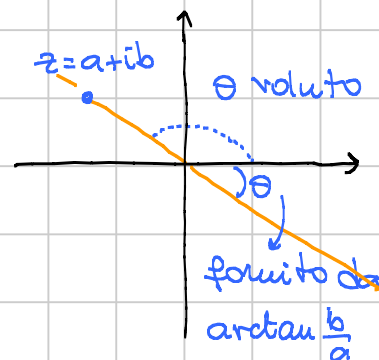
$$\theta = \arctan \frac{b}{a}$$

Questa va bene solo nel 1° e nel 4° quadrante, oltre alla restrizione $a \neq 0$.

Nel secondo e nel terzo quadrante, il risultato è sbagliato di π (bisogna aggiungere π).

Infatti $\frac{b}{a}$ = coeff. angolare della retta passante per 0 e z .

Se faccio $\arctan \frac{b}{a}$ ottengo l'angolo θ nel 4° quadrante, che differisce di π da quello che vorrei.



Oss. z e $\bar{z}$ hanno stesso ρ , e θ "scambiati di segno"

Prodotto di complessi in forma trigonometrica

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$w = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z \cdot w = \rho r [(\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i (\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi)]$$

$$= \rho r [\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)]$$

Quindi in forma trigonometrica, fare il prodotto vuol dire

→ moltiplicare i moduli

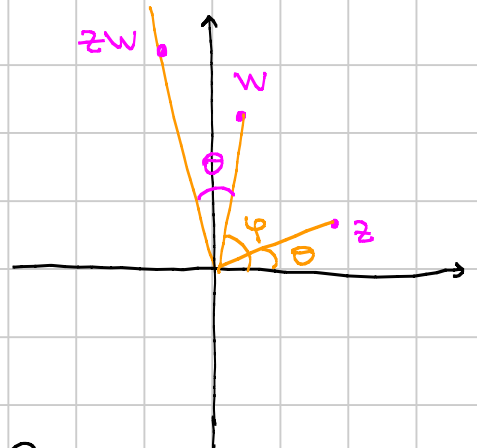
→ sommare gli argomenti

Analogamente, fare la divisione vuol dire

→ dividere i moduli

→ sottrarre gli argomenti

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{r} [\cos(\theta - \varphi) + i \sin(\theta - \varphi)]$$



Forma esponenziale

$$z = \rho e^{i\theta}$$

È semplicemente un altro modo di scrivere ρ e θ .

Vantaggio: operando brutalmente con l'esponenziale si ottiene la regola per il prodotto

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad w = r e^{i\varphi} \quad z \cdot w = \rho e^{i\theta} r e^{i\varphi} = \rho r \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = \rho r e^{i(\theta + \varphi)}$$

↑
somma argomenti
↑
prodotto moduli

Potenza n-esima di un numero complesso

$$z = a + bi \quad z^n = (a + bi)^n = \text{sviluppare con il binomio di Newton...}$$

$$z = \rho e^{i\theta} \quad z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

Volendo scrivere la formula in forma trigonometrica:

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

Esercizio: dimostrare rigorosamente per induzione,

Esempio 1 Dalla formula di sopra si "ricavano" varie formule trigonometriche. Partiamo che sia $r=1$.

$$\text{Pongo } n=2 \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta$$

Uguagliando parte reale e immaginaria si ottiene

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\text{Pongo } n=3 \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$$

$$\begin{aligned} & \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \cdot i \sin \theta + 3 \cos \theta \cdot \overset{-1}{i^2} \sin^2 \theta + \overset{-i}{i^3} \sin^3 \theta \\ &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria:

$$\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$\sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$$

Oss. Possono essere utili per integrare $\cos^3 \theta$ oppure $\sin^3 \theta$

$$\text{Esempio 2} \quad i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

In alternativa i ha $r=1$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, quindi

$$i^3 \text{ ha } r=1^3=1 \text{ e } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

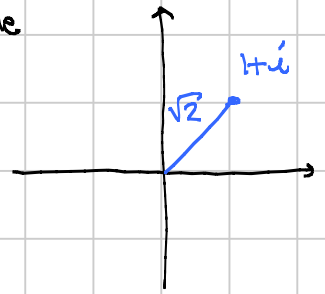
Esempio 3 Calcolare $(1+i)^{2012}$

1° modo: binomio di Newton (auguri!)

2° modo: passo dalla forma trigonometrica/esponenziale

$$z = (1+i) = \boxed{\sqrt{2}} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

$\uparrow$
 ρ



Quando elevo alla potenza 2012 ottengo

$$z^{2012} = (\sqrt{2})^{2012} e^{\frac{\pi}{4} i \cdot 2012} = (\sqrt{2})^{2012} \cdot e^{i \cdot 503\pi} = 2^{1006} e^{i 503\pi}$$

Ora torno in forma cartesiana $e^{i 503\pi} = e^{i\pi} = -1$

$$\text{Quindi } (1+i)^{2012} = -2^{1006}$$

$$\text{Analogamente } (1+i)^{-2012} = \frac{1}{(1+i)^{2012}} = -\frac{1}{2^{1006}}$$