

# ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 100

Titolo nota

12/12/2012

## NUMERI COMPLESSI

Come si presentano:

$\mathbb{C}$  = insieme dei numeri complessi

→ Forma cartesiana

→ Forma trigonometrica

→ Forma esponenziale

## Forma cartesiana

$z \in \mathbb{C}$

$$z = a + bi$$

$$i^2 = -1$$

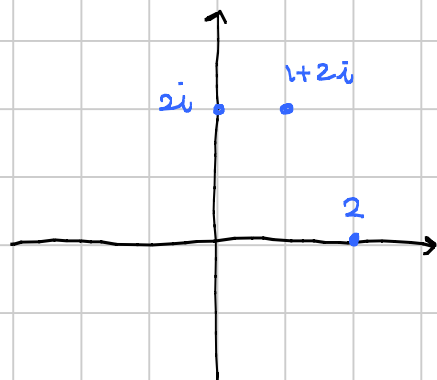
$a$  e  $b$  sono numeri reali

$a = \operatorname{Re}(z)$  = parte reale di  $z$

$b = \operatorname{Im}(z)$  = parte immaginaria di  $z$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$  nel senso che i numeri reali sono particolari numeri complessi, quelli con parte immaginaria  $= 0$ .

Un numero complesso  $z = a + bi$  si può identificare con il punto  $(a, b)$  del piano, che in questo caso si chiama piano di Gauss.



I numeri reali corrispondono "all'asse  $x$ " del piano reale, i numeri immaginari puri (cioè quelli con parte reale  $= 0$ ) corrispondono all'asse  $y$ .

## Operazioni algebriche

$$z = a + bi$$

$$w = c + di \quad \text{Allora}$$

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

$$z - w = (a - c) + (b - d)i$$

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bc i + bd \underbrace{i^2}_{-1} = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{c + di} = \frac{1}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{c - di}{c^2 + d^2}$$
$$= \frac{c^2 - (di)^2}{c^2 + d^2} = \frac{c^2 - d^2 i^2}{c^2 + d^2} = \frac{c^2 + d^2}{c^2 + d^2}$$

Questo ha senso se  $c^2 + d^2 \neq 0$ ,  
cioè se  $w \neq 0$ .

Dato il reciproco, il rapporto di numeri complessi è fatto!

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = (a+bi) \cdot \frac{c-di}{c^2+d^2} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2} i$$

Def. Si dice coniugato di  $z = a+bi$  il numero complesso  $\bar{z} = a-bi$ .

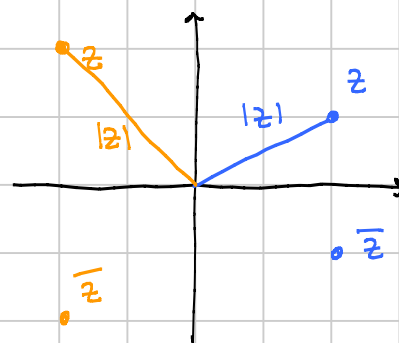
Si dice modulo di  $z = a+bi$  il numero reale non negativo

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad (\text{reale e } \geq 0)$$

Nel piano di Gauss:

→  $\bar{z}$  è il simmetrico di  $z$  rispetto all'asse reale,

→  $|z|$  è la distanza di  $z$  dall'origine.



Osservazioni ovvie

$$|z| = |\bar{z}|$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

Proprietà facili del coniugato

(1) il coniugato del coniugato è il numero stesso:  $\overline{(\bar{z})} = z$

(2) il coniugato commuta con le operazioni algebriche:

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \frac{1}{\bar{w}}$$

[Verifiche per esercizio: Facciamolo per il prodotto.]

Siano  $z = a+bi$ ,  $w = c+di$ . Allora

$$\overline{zw} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{ac+adi+bci-bd} = (ac-bd) - (ad+bc)i$$

$$\bar{z} \cdot \bar{w} = (a-bi) \cdot (c-di) = ac - adi - bci - bd = (ac-bd) - (ad+bc)i. \quad ]$$

## Relazione tra coniugato, modulo, reciproco

$$z = a+bi \quad \bar{z} = a-bi \quad z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = |z|^2$$

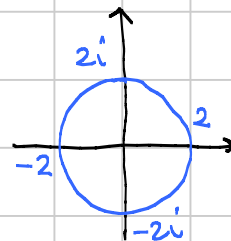
$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

da cui

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

se  $z \neq 0$

Esercizio Come sono fatti nel piano di Gauss tutti gli  $z \in \mathbb{C}$  t.c.  $|z|=2$ ?



Trovare tutti i numeri  $z \in \mathbb{C}$  t.c.  $|z|=3$  e  $\operatorname{Re}(z)=2$

Tradotto nel piano cartesiano, si tratta di risolvere

$$\begin{cases} a^2+b^2=9 \\ a=2 \end{cases}$$

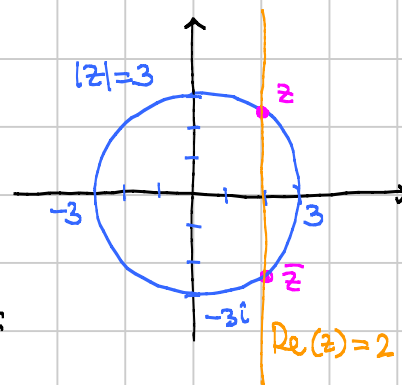
$$\begin{cases} |z|=3, |z|^2=9 \\ \operatorname{Re}(z)=2 \end{cases}$$

$b^2=5 \Rightarrow b=\pm\sqrt{5}$ . Quindi ci sono 2 soluzioni:

$$2+\sqrt{5}i$$

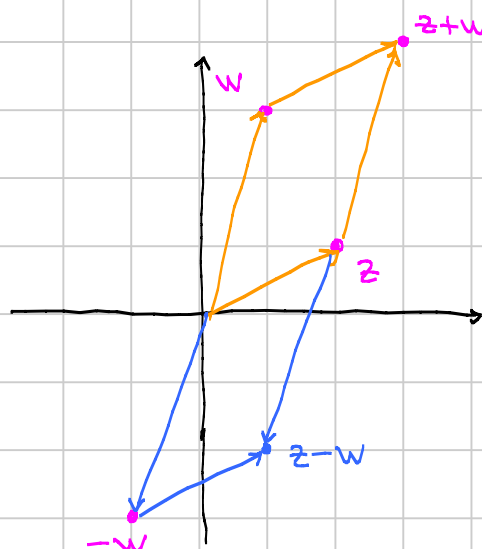
$$2-\sqrt{5}i$$

— o — o —



## Somma e differenza nel piano di Gauss

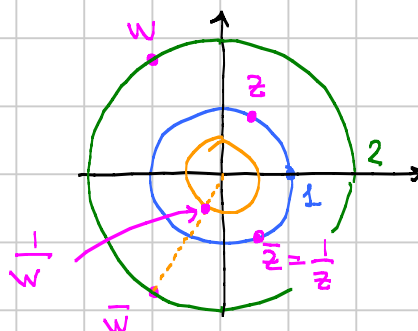
- La somma diventa quella che in fisica si chiama regola del parallelogrammo
- La differenza vuol dire sommare  $-w$ , e  $-w$  è il simmetrico rispetto all'origine di  $w$ .



- Il reciproco si interpreta attraverso la formula  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .

Caso particolare: se  $|z|=1$ , allora  $\frac{1}{z} = \bar{z}$

Se  $|z| \neq 1$ , allora comunque  $\frac{1}{z}$  ha la stessa direzione e verso di  $\bar{z}$ , ma modulo diverso.



Proprietà del modulo Se  $z \in \mathbb{C}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , allora  $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$

Più in generale, se  $z \in \mathbb{C}$  e  $w \in \mathbb{C}$ , allora

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

Inoltre se  $z \neq 0$

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$$

Verifica della seconda  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}$ , quindi

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|^2} \cdot |\bar{z}| = \frac{1}{|z|^2} \cdot |z| = \frac{1}{|z|}$$

Verifica della prima  $z = a+bi$   $w = c+di$

$$\begin{aligned} |z \cdot w|^2 &= |(a+bi) \cdot (c+di)|^2 = |(ac-bd) + (ad+bc)i|^2 \\ &= (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \end{aligned}$$

$$|z|^2 \cdot |w|^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

Oss. Verifica più furba della prima:

$$|z \cdot w|^2 = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{Modulo}^2 = \text{numero.} \\ \text{conjugato}}}{z \cdot w} \cdot \overline{z \cdot w} = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{conj. prod.} \\ = \text{prod. conj.}}}{z \cdot w} \cdot \overset{\substack{\uparrow \\ \text{commutativa}}}{\bar{z} \cdot \bar{w}} = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{come 1° passaggio}}}{z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \bar{w}} = |z|^2 \cdot |w|^2$$