

EQUAZIONI 1° ORDINE LINEARI

$$u' + a(t)u = b(t)$$

Due metodi risolutivi: $\rightarrow$ Fattore integrante
 $\rightarrow$ Omogenea + tentativo

FATTORE INTEGRANTE

Considero una primitiva di $a(t)$, cioè $A'(t) = a(t)$

Moltiplico a dx e sx per $e^{A(t)}$ $\leftarrow$ *fattore integrante*

$$u'(t) e^{A(t)} + a(t) u(t) e^{A(t)} = b(t) e^{A(t)}$$

$$\left[u(t) e^{A(t)} \right]' = b(t) e^{A(t)}$$

Ora posso integrare a destra e ottenere $u(t) e^{A(t)}$, da cui si ricava immediatamente $u(t)$

$$u(t) e^{A(t)} = \int b(s) e^{A(s)} ds + c$$

da cui

$$u(t) = c e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int b(s) e^{A(s)} ds$$

*Formula
risolutiva*

Esempio 1 $u' + \underbrace{2t}_{a(t)} u = \underbrace{t^3}_{b(t)}$ $A(t) = t^2$

Fattore integrante: $e^{A(t)} = e^{t^2}$. Moltiplico a dx e sx per il fattore int!

$$u' e^{t^2} + 2t u \cdot e^{t^2} = t^3 e^{t^2}$$

$$\left[u \cdot e^{t^2} \right]' = t^3 e^{t^2}$$

Quindi $u \cdot e^{t^2} = \int t^3 e^{t^2} dt = \int \underset{F}{t^2} \cdot \underset{g}{t} e^{t^2} dt$

$$= \underset{F}{t^2} \cdot \underset{G}{\frac{1}{2} e^{t^2}} - \int \underset{f}{2t} \cdot \underset{G}{\frac{1}{2} e^{t^2}} dt$$

$$= \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \int t e^{t^2} dt = \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \frac{1}{2} e^{t^2}$$

In conclusione: $u(t) \cdot e^{t^2} = \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \frac{1}{2} e^{t^2} + c$, da cui si ricava

$$u(t) = c \cdot e^{-t^2} + \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2}$$

Soluzione generale.

Oss. Il metodo del fattore integrante funziona a patto di saper fare 2 primitive:

→ la primitiva di $a(t)$ per trovare $A(t)$

→ la primitiva di $b(t) e^{A(t)}$.

METODO: OMOGENEA + TENTATIVO

Per la teoria generale delle equazioni lineari, la soluzione sarà del tipo

$$u(t) = \boxed{c \cdot u_1(t)} + \boxed{\bar{u}(t)}$$

↓ sol. eq. omog.

↑ sol. speciale eq. non omog.

Qual è l'equazione omogenea associata? $u' + a(t)u = b(t)$

$$\leadsto u' + a(t)u = 0$$

Questa si può vedere come equazione a variabili separabili

$$u' = -a(t)u$$

① Separare: $\frac{du}{dt} = -a(t)u \leadsto \frac{du}{u} = -a(t)dt$

② Integrare: $\int \frac{du}{u} = -\int a(t)dt$; $\log|u| = -A(t) + c$

③ Ricavare: $\log|u(t)| = -A(t) + c \leadsto |u(t)| = e^{-A(t) + c}$

$$\leadsto u(t) = \pm e^{-A(t) + c}$$

Ora

$$u(t) = \pm e^{-A(t)+c} = \boxed{\pm e^c} \cdot e^{-A(t)} = c \cdot e^{-A(t)}$$

↑ costante qualunque positiva o negativa

Conclusione: la soluzione generale dell'eq. omogenea associata è

$$u(t) = c e^{-A(t)}$$

N.B. È il primo pezzo della formula ottenuta con il fattore integrante.

Mi serve una soluzione speciale $\bar{u}(t)$ dell'eq. non omogenea. Posso farlo con il tentativo o con la variazione delle costanti, cioè cercando del tipo

$$u(t) = c(t) e^{-A(t)}$$

Devo calcolare solo $u'(t) = c'(t) e^{-A(t)} + c(t) \cdot e^{-A(t)} (-a(t))$

Sostituisco $u(t)$ e $u'(t)$ nell'equazione NON omog: $u' + a(t)u = b(t)$

$$\underbrace{c'(t) e^{-A(t)} - c(t) e^{-A(t)} a(t)}_{u'} + \underbrace{a(t) c(t) e^{-A(t)}}_{+ a(t)u} = b(t)$$

Otengo quindi $c'(t) e^{-A(t)} = b(t)$, da cui $c'(t) = b(t) e^{A(t)}$, quindi

$$c(t) = \int b(t) e^{A(t)} dt, \text{ da cui}$$

$$u(t) = e^{-A(t)} \int b(t) e^{A(t)} dt$$

soluzione speciale dell'eq. non omogenea, che coincide con il secondo pezzo della formula ottenuta mediante fattore integrante.

Tornando all'esempio: $u' + 2tu = t^3$, l'eq. omogenea associata è

$$u' + 2tu = 0 \rightsquigarrow u' = -2tu \rightsquigarrow \frac{du}{dt} = -2tu \rightsquigarrow \frac{du}{u} = -2t dt$$

$$\leadsto \int \frac{du}{u} = \int -2t dt \leadsto \log |u| = -t^2 + c \leadsto |u| = e^{-t^2+c}$$

$$\leadsto u(t) = \pm e^{-t^2+c} = ce^{-t^2} \leadsto \text{parte sol. gen. eq. omog.}$$

Per trovare una soluzione speciale si può fare un tentativo con un polinomio. Di che grado? Sembra ragionevole il grado 2

$$u(t) = at^2 + bt + c$$

$$u'(t) = 2at + b$$

Sostituisco:

$$\underbrace{2at+b}_{u'} + \underbrace{2at^3+2bt^2+2ct}_{+2tu} = t^3$$

$$2a = 1 \quad (\text{coeff. } t^3)$$

$$2b = 0 \quad (\text{coeff. } t^2)$$

$$2a+2c = 0 \quad (\text{coeff. } t)$$

$$b = 0 \quad (\text{termine noto})$$

$$a = \frac{1}{2}, b = 0, c = -a = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Soluzione speciale: } u(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sol. gen.} = c \cdot e^{-t^2} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}$$

corretto dopo video

Oss. È andata bene nel risolvere il sistema lineare che aveva + equazioni che incognite. È andata bene perché t^3 era una potenza dispari. Per lo stesso motivo è andata bene la primitiva di $t^3 e^{t^2}$. In generale la primitiva di $t^{2k+1} e^{t^2}$ si riesce ad esprimere con le funzioni elementari

$$t^{2k+1} \cdot e^{t^2} = t^{2k} \cdot e^{t^2} \cdot t \leadsto y = t^2$$

Oss. Se nelle eq. a coeff. costanti c'è a dx polinomio. e^{ax} oppure polinomio. $\sin(ax)$, il tentativo ragionevole da fare è dello stesso tipo (in certi casi occorre poi aggiungere delle $t \dots$)