

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 098

Titolo nota

07/12/2012

Esempio 1 $u'' - 3u' - 4u = t^2$

Tentativo da fare : $u(t) = at^2 + bt + c$ ← polinomio completo dello stesso grado di quello assegnato

$$u'(t) = 2at + b, \quad u''(t) = 2a$$

Sostituisco nell'equazione:

$$\underbrace{2a}_{u''} - \underbrace{6at - 3b}_{-3u'} - \underbrace{4at^2 - 4bt - 4c}_{-4u} = t^2$$

$$-4a = 1 \quad (\text{coeff. } t^2)$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$-6a - 4b = 0 \quad (\text{coeff. } t)$$

$$4b = -6a \Rightarrow b = -\frac{3}{2}a = \frac{3}{8}$$

$$2a - 3b - 4c = 0 \quad (\text{termine noto})$$

$$4c = 2a - 3b \Rightarrow c = \frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b = -\frac{1}{8} - \frac{9}{32} = -\frac{13}{32}$$

Sol. gen. eq. NON omogenea: $u(t) = ae^{4t} + be^{-t} - \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{8}t - \frac{13}{32}$

Regola generale: se il termine non omogeneo è un polinomio, allora il tentativo è un polinomio completo dello stesso grado a coeff. incogniti. Funziona quando non ci sono polinomi tra le soluzioni dell'omogenea, cioè quando $x=0$ non è radice del polinomio caratteristico dell'eq. omogenea. Se $x=0$ è radice del pol. caratt. di molteplicità m , allora bisogna moltiplicare il tentativo per t^m .

Esempio 2 $u^{IV} + 9u'' = t^3 - 3$

Omogenea associata: $u^{IV} + 9u'' = 0 \rightsquigarrow x^4 + 9x^2 = 0 \rightsquigarrow x^2(x^2 + 9) = 0$

→ Radici: $x=0$ con molteplicità 2, $x = \pm 3i$

→ Base: $\sin(3t), \cos(3t), \underset{e^{0t}}{1}, \underset{te^{0t}}{t}$

Il tentativo $u(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ fallisce perché ci sono polinomi (1 e t) tra le soluzioni dell'omogenea.

Essendo 2 la molteplicità della radice $\lambda = 0$, devo moltiplicare il tentativo per t^2 :

$$u(t) = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 \quad (\text{è inutile aggiungere } +et + f)$$

Svolgo i conti:

$$u'(t) = 5at^4 + 4bt^3 + 3ct^2 + 2dt$$

$$u''(t) = 20at^3 + 12bt^2 + 6ct + 2d$$

$$u'''(t) = 60at^2 + 24bt + 6c$$

$$u^{(4)}(t) = 120at + 24b$$

Sostituisco nell'equazione:

$$\underbrace{120at + 24b}_{u^{(4)}} + \underbrace{180at^3 + 108bt^2 + 54ct + 18d}_{+9u''} = t^3 - 3$$

$$180a = 1 \quad (\text{coeff. } t^3)$$

$$a = \frac{1}{180}$$

$$108b = 0 \quad (\text{coeff. } t^2)$$

$$b = 0$$

$$120a + 54c = 0 \quad (\text{coeff. } t)$$

$$c = -\frac{120}{54}a = -\frac{120}{54} \cdot \frac{1}{180} = -\frac{1}{81}$$

$$24b + 18d = -3 \quad (\text{termine noto})$$

$$d = -\frac{1}{6}$$

Sol. gen. eq. non omogenea:

$$u(t) = a \sin(3t) + b \cos(3t) + c + dt + \frac{1}{180}t^5 - \frac{1}{81}t^3 - \frac{1}{6}t^2$$

sol. gen. eq. omogenea (comb. lineare elem. base)

soluzione speciale dell'eq. non omogenea trovata con il tentativo

Oss. Se a dx c'è un po' di tutto (polinomi, esponenziali, funz. trig.) è un misto dei tentativi per i singoli pezzi.

Anzi si può (GRAZIE ALLA LINEARITÀ).

→ risolvere separatamente con i singoli pezzi

→ sommare le soluzioni così ottenute.

(se u risolve con f e v risolve con g , allora $u+v$ risolve con $f+g$)

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

Esempio Risolvere $u'' - 3u' - 4u = t$

Con il tentativo $u(t) = at + b$, $u'(t) = a$, $u''(t) = 0$. Sostituisco

$$0 - 3a - 4at - 4b = t \quad \begin{cases} -4a = 1 \\ -3a - 4b = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} a &= -\frac{1}{4} \\ b &= -\frac{3}{4}a = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

Quindi sol. gen. NON omog: $u(t) = ae^{4t} + be^{-t} - \frac{1}{4}t + \frac{3}{16}$.

Metodo alternativo: la soluzione generale dell'omog. è $u(t) = ae^{4t} + be^{-t}$
Cerco la soluzione speciale della non omogenea facendo "variazione le costanti".

$$u(t) = a(t)e^{4t} + b(t)e^{-t}$$

Calcolo

$$u'(t) = a'(t)e^{4t} + 4a(t)e^{4t} + b'(t)e^{-t} - b(t)e^{-t}$$

Impongo che la somma dei termini con la derivate faccia 0

$$a'(t)e^{4t} + b'(t)e^{-t} = 0 \quad \text{1ª equazione}$$

A questo punto $u'(t) = 4a(t)e^{4t} - b(t)e^{-t}$. Da qui calcolo $u''(t)$:

$$u''(t) = 4a'(t)e^{4t} + 16a(t)e^{4t} - b'(t)e^{-t} + b(t)e^{-t}$$

Sostituisco $u''(t)$, $u'(t)$ e $u(t)$ nell'equazione

$$\begin{array}{lcl} \cancel{4a'(t)e^{4t}} + \cancel{16a(t)e^{4t}} - \cancel{b'(t)e^{-t}} + \cancel{b(t)e^{-t}} & & u''(t) \\ -\cancel{12a(t)e^{4t}} + \cancel{3b(t)e^{-t}} & & -3u'(t) \\ -\cancel{4a(t)e^{4t}} - \cancel{4b(t)e^{-t}} & = & -4u(t) = t \\ & & t \end{array}$$

Dove succedere che i termini senza derivate se ne vanno

Resta

$$4a'(t)e^{4t} - b'(t)e^{-t} = t$$

2^a equazione

La 1^a e 2^a equazione sono un sistema in $a'(t)$ e $b'(t)$. Risolvendo il sistema trovo $a'(t)$ e $b'(t)$, poi integrando troverò $a(t)$ e $b(t)$.

$$\begin{cases} a'(t)e^{4t} + b'(t)e^{-t} = 0 \\ 4a'(t)e^{4t} - b'(t)e^{-t} = t \end{cases} \quad \text{Sommo: } 5a'(t)e^{4t} = t. \text{ Da cui}$$

$$b'(t)e^{-t} = -a'(t)e^{4t} = -\frac{t}{5}$$

Pertanto $a'(t) = \frac{1}{5}te^{-4t}$ $b'(t) = -\frac{1}{5}te^{+t}$

Non resta che trovare $a(t)$ e $b(t)$:

$$a(t) = \frac{1}{5} \int te^{-4t} dt = \frac{1}{5} \left(t \cdot \left(-\frac{1}{4}e^{-4t}\right) + \int \frac{1}{4}e^{-4t} dt \right)$$

F g

☹️

$$= -\frac{4}{5}te^{-4t} - \frac{1}{80}e^{-4t}$$

$$\left[= -\frac{1}{20}te^{-4t} - \frac{1}{80}e^{-4t} \right]$$

corretto dopo video

$$b(t) = -\frac{1}{5} \int te^{+t} dt = -\frac{1}{5} \left(+te^{+t} - \int e^{+t} dt \right) = -\frac{1}{5}te^{+t} + \frac{1}{5}e^{+t}$$

Quindi la soluzione speciale è:

$$u(t) = a(t)e^{4t} + b(t)e^{-t} = -\frac{4}{5}t - \frac{1}{80} - \frac{1}{5}t + \frac{1}{5}$$

$= -t + \dots$ c'è un conto sbagliato...

$$\left[= -\frac{1}{20}t - \frac{1}{80} - \frac{1}{5}t + \frac{1}{5} \right]$$

$$= -\frac{1}{4}t + \frac{15}{80} = -\frac{1}{4}t + \frac{3}{16} \quad \text{☺️}$$

Aggiunto dopo video