

Eq. DIFF. LINEARI NON OMOGENEE

La soluzione generale di una eq. diff. non omogenea è data da

$$u(t) = \underbrace{c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t)}_{\text{sol. gen. eq. omogenea associata}} + \underbrace{\bar{u}(t)}_{\text{soluzione qualunque eq. non omogenea}}$$

Come trovare $\bar{u}(t)$. Due metodi

- 1 - Variatione delle costanti
- 2 - Rovane ad indovinare

Il metodo 1 è un algoritmo sistematico, che funziona sempre, MA anche nei casi più semplici richiede molti calcoli.

Il metodo 2 non è sistematico, funziona solo in alcuni casi semplici, ma quando funziona è rapido.

Esempio 1 $u'' - 3u' - 4u = e^{2t}$

Esaminiamo l'eq. omogenea associata: $u'' - 3u' - 4u = 0$

$$\leadsto x^2 - 3x - 4 = 0 \leadsto (x-4)(x+1) = 0 \leadsto x = 4 \text{ e } x = -1$$

$$\leadsto e^{4t}, e^{-t} \leadsto \text{Sol. gen. eq. omog. } ae^{4t} + be^{-t}$$

Cerco una soluzione qualunque dell'eq. non omogenea.

È ragionevole cercarla della forma $u(t) = \lambda e^{2t}$. Calcolo $u'(t) = 2\lambda e^{2t}$, $u''(t) = 4\lambda e^{2t}$ e sostituisco nell'equazione:

$$4\lambda e^{2t} - 6\lambda e^{2t} - 4\lambda e^{2t} = e^{2t} \Rightarrow -6\lambda e^{2t} = e^{2t} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{6}$$

Quindi $\bar{u}(t) = -\frac{1}{6}e^{2t}$ è una solus. dell'eq. non omogenea.

Sol. gen. non omogenea: $u(t) = ae^{4t} + be^{-t} - \frac{1}{6}e^{2t}$

Esempio 2 $u'' - 3u' - 4u = e^{-7t}$ Parte omogenea come prima.

Cerco soluzione speciale del tipo $u(t) = \lambda e^{-7t}$. Calcolo $u'(t) = -7\lambda e^{-7t}$
 $u''(t) = 49\lambda e^{-7t}$. Sostituisco

$$49\lambda e^{-7t} + 21\lambda e^{-7t} - 4\lambda e^{-7t} = e^{-7t} ; 66\lambda e^{-7t} = e^{-7t} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{66}$$

Sol. gen. eq. NON omogenea: $u(t) = \boxed{ae^{4t} + be^{-t}} + \boxed{\frac{1}{66}e^{-7t}}$
sol. gen. eq. omogenea ↑ sol. speciale $\bar{u}(t)$

Esempio 3 $u'' - 3u' - 4u = e^{4t}$ Cerco una soluzione del tipo $u(t) = \lambda e^{4t}$

Faccio i conti: $u'(t) = 4\lambda e^{4t}$, $u''(t) = 16\lambda e^{4t}$ e sostituisco

$$16\lambda e^{4t} - 12\lambda e^{4t} - 4\lambda e^{4t} = e^{4t} \leadsto 0 = e^{4t} \leadsto \text{non trovo } \lambda \dots$$

È andata male perché e^{4t} è tra le soluzioni dell'omogenea, quindi per definizione sostituendo a sx viene 0. Stessa cosa sarebbe successa con e^{-t} .

In questo caso il tentativo da fare è $u(t) = \lambda t e^{4t}$. Allora

$$u'(t) = \lambda e^{4t} + 4\lambda t e^{4t}, \quad u''(t) = 4\lambda e^{4t} + 4\lambda e^{4t} + 16\lambda t e^{4t}$$

$$\underbrace{8\lambda e^{4t} + 16\lambda t e^{4t}}_{u''} - \underbrace{3\lambda e^{4t} - 12\lambda t e^{4t}}_{-3u'} - \underbrace{4\lambda t e^{4t}}_{-4u} = e^{4t}$$
$$5\lambda e^{4t} = e^{4t} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}$$

Bruttalmente: i termini con te^{4t} se ne vanno perché sono prodotti dall'aver derivato l'esponenziale, lasciando la t intatta. Quindi sono 0. (quello che si ottiene sostituendo l'esponenziale) = $t \cdot 0 = 0$

I termini senza t non se ne vanno altrimenti te^{4t} sarebbe sol. dell'omog.

Sol. gen. eq. non omogenea: $u(t) = ae^{4t} + be^{-t} + \frac{1}{5}te^{4t}$

Regola generale: se il termine non omogeneo è del tipo $e^{\alpha t}$, allora il tentativo da fare è $u(t) = \lambda e^{\alpha t}$. Questo funziona se α non è radice del polinomio caratteristico.
 Se α è radice del polinomio di molteplicità m , allora il tentativo da fare è $u(t) = \lambda t^m e^{\alpha t}$

Oss. Questo vale per ogni possibile esponenziale! $2^t = e^{\log 2 \cdot t} \Rightarrow \alpha = \log 2$.

Esempio 4 $u'' - 3u' - 4u = \sin t$

Cerco una soluzione del tipo $u(t) = \lambda \sin t + \mu \cos t$. Faccio i calcoli!

$$u'(t) = \lambda \cos t - \mu \sin t, \quad u''(t) = -\lambda \sin t - \mu \cos t.$$

Sostituisco nell'equazione

$$\underbrace{-\lambda \sin t - \mu \cos t}_{u''} - \underbrace{3\lambda \cos t + 3\mu \sin t}_{-3u'} - \underbrace{4\lambda \sin t - 4\mu \cos t}_{-4u} = \sin t$$

$$\begin{cases} -\lambda + 3\mu - 4\lambda = 1 & (\text{coeff. } \sin t) \\ -\mu - 3\lambda - 4\mu = 0 & (\text{coeff. } \cos t) \end{cases} \quad \begin{cases} -5\lambda + 3\mu = 1 & \cdot 5 \\ -3\lambda - 5\mu = 0 & \cdot 3 \end{cases}$$

$$-25\lambda - 15\mu = 5 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{34}$$

$$\mu = -\frac{3}{5}\lambda = +\frac{3}{34}$$

Sol. gen. eq. non omogenea: $u(t) = a e^{4t} + b e^{-t} - \frac{5}{34} \sin t + \frac{3}{34} \cos t$
 $\bar{u}(t)$: soluzione speciale

Regola generale: se il termine non omogeneo è del tipo $\sin(\alpha t)$ oppure $\cos(\alpha t)$, il tentativo da fare è $u(t) = \lambda \sin(\alpha t) + \mu \cos(\alpha t)$ (nel tentativo $\sin$ e $\cos$ compaiono sempre insieme). Questo funziona se $\sin(\alpha t)$ e $\cos(\alpha t)$ non sono soluzioni dell'eq. omogenea. Se lo sono, si moltiplica delle t finché basta (dipende dalla molteplicità).

Esempio 5

$$u'' + u = \sin t$$

Omoogenea: $u'' + u = 0 \leadsto x^2 + 1 = 0$
 $\leadsto x = \pm i \leadsto$ Base: $\sin t, \cos t$

Tentativo giusto: $u(t) = \lambda t \sin t + \mu t \cos t$

$$u'(t) = \lambda \sin t + \lambda t \cos t + \mu \cos t - \mu t \sin t$$

$$u''(t) = \lambda \cos t + \lambda \cos t - \lambda t \sin t - \mu \sin t - \mu \sin t - \mu t \cos t$$

Sostituendo nell'equazione:

$$\underbrace{2\lambda \cos t - \cancel{\lambda t \sin t} - 2\mu \sin t - \cancel{\mu t \cos t}}_{u''} + \underbrace{\cancel{\lambda t \sin t} + \cancel{\mu t \cos t}}_{+u} = \sin t$$

$$2\lambda \cos t - 2\mu \sin t = \sin t \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0, \mu = -\frac{1}{2}$$

Sol. gen. eq. non omogenea: $u(t) = a \sin t + b \cos t - \frac{1}{2} t \cos t$

— 0 — 0 —