

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 096

Titolo nota

06/12/2012

Esempio 1

$$u'' - 4u' - 5u = 0$$

Equazione

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

Polinomio

$$(x-5)(x+1) = 0$$

$$x = -1, x = 5$$

Radici

$$e^{-t}, e^{5t}$$

Base

Sol. generale : $u(t) = a e^{-t} + b e^{5t}$

Esempio 2

$$u'' - 4u' + 4u = 0$$

Equazione

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

Polinomio

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x = 2 \text{ radice di molteplicità } 2$$

$$e^{2t}, t e^{2t}$$

Sol. generale : $u(t) = a e^{2t} + b t e^{2t} = (a + b t) e^{2t}$

Esempio 3

$$u'' + 10u' + 29u = 0$$

Equazione

$$x^2 + 10x + 29 = 0$$

Polinomio

$$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - 29} = -5 \pm \sqrt{-4} = -5 \pm 2i$$

Quindi abbiamo 2 radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha = -5$ e $\beta = 2$

$$e^{-5t} \cos(2t), e^{-5t} \sin(2t)$$

Base

Sol. generale : $u(t) = a e^{-5t} \cos(2t) + b e^{-5t} \sin(2t)$

Esempio 4

$$u'' + 4u' = 0$$

Equazione

$$x^2 + 4x = 0$$

Polinomio

$$x(x+4) = 0$$

$$x = 0, x = -4$$

Radici

$$e^{-4t}, e^{0t} = 1$$

Base

Sol. generale : $u(t) = a e^{-4t} + b$

Esempio 5

$$u'' - 4u = 0$$

Equazione

$$x^2 - 4 = 0$$

Polinomio

$$x = \pm 2$$

Radici

$$e^{2t}, e^{-2t}$$

Base

Sol. generale

$$u(t) = ae^{2t} + be^{-2t}$$

Esempio 6

$$u'' + 4u = 0$$

Equazione

$$x^2 + 4 = 0$$

Polinomio

$$x^2 = -4 \quad x = \pm 2i$$

Radici

$$\alpha \pm i\beta \text{ con } \alpha = 0 \text{ e } \beta = 2$$

$$e^{0t} \cos(2t), e^{0t} \sin(2t)$$

Base

Sol. generale:

$$u(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)$$

Esempio 7

$$u^{(4)} + 9u'' = 0$$

Equazione

$$x^4 + 9x^2 = 0$$

Polinomio

$$x^2(x^2 + 9) = 0$$

Le radici sono $x=0$ (multiplicità 2) e $x = \pm 3i$ Base: $e^{0t}, t e^{0t}, e^{0t} \cos(3t), e^{0t} \sin(3t)$

Sol. generale:

$$u(t) = a + bt + c \cos(3t) + d \sin(3t)$$

Esempio 8

$$u^{(4)} + 2u'' + u = 0$$

Equazione

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 0$$

Polinomio

$$(x^2 + 1)^2 = 0$$

$$x = \pm i \text{ di molteplicità } 2 \quad (\alpha = 0, \beta = 1)$$

Base: $e^{0t} \cos t, e^{0t} \sin t, t e^{0t} \cos t, t e^{0t} \sin t$

Sol. generale:

$$u(t) = a \cos t + b \sin t + c t \cos t + d t \sin t$$

Oss. In tutti i casi l'intervallo massimale di esistenza è tutto $\mathbb{R}$ (se i coeff. non hanno problemi, la solus. non ha problemi).

Perché la base si trova in questo modo? Consideriamo un'eq. del tipo

$$au'' + bu' + cu = 0$$

Sembra ragionevole cercare una soluzione di tipo esponenziale

$$u(t) = e^{\lambda t}$$

Calcolo le sue derivate: $u'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ e sostituisco

$$au'' + bu' + cu = a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} (a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

L'unica speranza è che $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, cioè che λ sia una radice del polinomio associato all'equazione.

Se $\Delta > 0$, ho 2 valori buoni per λ , quindi ho 2 sol. lin. indip., quindi ho trovato una base.

Oss. Se λ è un numero complesso $\alpha + i\beta$, si ha che

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

Oss. $u'' + u = 0 \rightsquigarrow x^2 + 1 = 0 \rightsquigarrow x = \pm i \rightsquigarrow u(t) = a \cos t + b \sin t$

$$u'' - u = 0 \rightsquigarrow x^2 - 1 = 0 \rightsquigarrow x = \pm 1 \rightsquigarrow u(t) = a e^t + b e^{-t}$$

Se e^t, e^{-t} è una base, allora anche $\frac{e^t + e^{-t}}{2}$ e $\frac{e^t - e^{-t}}{2}$ è una base,
 cioè anche $\cosh t$ e $\sinh t$ sono una base, quindi posso scrivere la soluzione come $u(t) = a \cosh t + b \sinh t$

EQUAZIONI NON OMOGENEE

$$\sum_{k=0}^n a_k(t) u^{(k)}(t) = f(t)$$

Fatto generale

Se u e v sono due soluzioni dell'eq. non omogenea, allora la differenza $u - v$ è soluzione dell'eq. omogenea associata, cioè della stessa equazione senza $f(t)$ a dx.

Dim. Pongo $w = u - v$. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $w^{(k)}(t) = u^{(k)}(t) - v^{(k)}(t)$ quindi

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) w^{(k)}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) (u^{(k)}(t) - v^{(k)}(t)) \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) u^{(k)}(t)}_{f(t)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) v^{(k)}(t)}_{f(t)} = f(t) - f(t) = 0\end{aligned}$$

quindi w è soluzione dell'eq. omogenea.
— o — o —

Oss. Se u e v sono soluzioni della non omogenea, allora $w = u + v$ risolve la stessa equazione con $2f(t)$ a destra.

Se u è soluzione della non omogenea, allora $3u$ risolve con $3f(t)$...
— o — o —

Conseguenza: la soluzione generale di un'eq. diff. lin. non omogenea si scrive nella forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t) + \bar{u}(t) \quad \text{dove}$$

- $c_1, \dots, c_n$ sono le costanti arbitrarie
- $u_1(t), \dots, u_n(t)$ è una qualunque base dello spazio delle soluzioni dell'eq. omogenea
- $\bar{u}(t)$ è una soluzione qualunque dell'eq. NON omogenea

Dim. Sia u sol. della non omogenea. Allora $u(t) - \bar{u}(t)$ è sol. dell'omog., quindi combinazione lineare degli elementi della base...

Operativamente Per trovare TUTTE le soluzioni di un'eq. NON omogenea basta trovare

- TUTTE le soluzioni dell'eq. omog. associata (cioè una base)
- UNA soluzione qualsiasi dell'eq. non omogenea.

Prossime puntate: come trovare $\bar{u}(t)$ o o o