

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI OMOGENEE

$$a_m(t) u^{(m)} + a_{m-1}(t) u^{(m-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = 0$$

$$\sum_{k=0}^m a_k(t) u^{(k)} = 0$$

Teoria generale L'insieme delle soluzioni di un'eq. diff. lin. omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione n ,

Detta $u_1(t), \dots, u_n(t)$ una base di tale spazio, la soluzione generale si scrive come combinazione lineare, cioè nella forma

$$u(t) = C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) + \dots + C_n u_n(t)$$

Si intende che $C_1, \dots, C_n$ sono i parametri liberi

Operativamente: se conosco una base, conosco la soluzione generale

Dim. Per dim. che è uno spazio vettoriale occorrono 2 verifiche

① La somma di soluzioni è ancora soluzione. Siano u e v 2 soluzioni, e sia $w = u + v$. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $w^{(k)} = u^{(k)} + v^{(k)}$. Allora

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k(t) w^{(k)}(t) &= \sum_{k=0}^n a_k(t) [u^{(k)}(t) + v^{(k)}(t)] \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k(t) u^{(k)}(t)}_{=0 \text{ perché } u \text{ è soluzione}} + \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k(t) v^{(k)}(t)}_{=0 \text{ perché } v \text{ è soluzione}} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Quindi anche w è solut.

② Il prodotto di una sd. per una costante λ è ancora sol.

Sia u una sd., e sia $w = \lambda u$. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che

$$w^{(k)}(t) = \lambda u^{(k)}(t), \text{ quindi}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) w^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \lambda u^{(k)}(t) = \lambda \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) u^{(k)}(t)}_{=0 \text{ perché } u \text{ è soluzione}} = 0$$

Bisogna ora dimostrare che la dimensione dello spazio è n . Bisogna trovare una base fatta da n elementi. Considero il problema di Cauchy per l'equazione usando come dato iniziale una cosa del tipo $0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posizione } k}}{1}, 0, \dots, 0$

chiamo u_k la soluzione corrispondente. Dico che è una base. Anche qui devo fare 2 verifiche.

① Genera tutto, cioè ogni altra soluzione è comb. lineare di $u_1, \dots, u_n$.

Facile, perché la soluzione con dato iniziale $d_1, \dots, d_n$ sarà

$$d_1 u_1(t) + \dots + d_n u_n(t)$$

e questa verifica sia le condizioni, sia l'equazione.

② Sono linearmente indipendenti, cioè ogni combinazione lineare nulla ha tutti i coeff. nulli. Prendiamo una qualunque comb. lineare

$$c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t) = u(t)$$

e supponiamo che sia sempre 0. In particolare all'istante iniziale t_0

$$\text{si avrà che } u^{(k)}(t_0) = 0. \text{ Ma } u^{(k)}(t_0) = c_1 u_1^{(k)}(t_0) + \dots + c_n u_n^{(k)}(t_0) \\ = c_k \underbrace{u_k^{(k)}(t_0)}_{\substack{\uparrow \\ \text{tutte le altre fanno } 0}} = c_k$$

Quindi tutti i coeff. sono nulli.

— 0 — 0 —

Fatto generale Per un'eq. diff. lineare omogenea l'intervallo massimale di esistenza è il più grande intervallo (o semiretta o tutto $\mathbb{R}$) che contiene il tempo iniziale t_0 e dove sono definiti tutti i coeff.

Se non hanno problemi i coeff. $a_k(t)$, non ha problemi la soluzione.

Come determinare una base dello spazio delle soluzioni

Esiste un algoritmo per farlo se l'eq. è anche a coeff. costanti.

Caso delle equazioni di ordine 2

$$au'' + bu' + cu = 0$$

Considero il polinomio associato all'equazione $ax^2 + bx + c$, che si chiama polinomio caratteristico. Considero le radici del polinomio. Ci sono 3 casi.

1° caso $\Delta > 0$. Il polinomio ha 2 radici reali distinte: λ, μ .

Allora una base è $e^{\lambda t}, e^{\mu t}$, quindi la soluzione generale è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

2° caso $\Delta = 0$. Il polinomio ha una radice reale λ di molteplicità 2.

Allora una base è $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}$, quindi la soluzione generale è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

Oss. I due elementi $e^{\lambda t}$ e $t e^{\lambda t}$ non sono linearmente dipendenti.

Per esserlo uno dovrebbe essere uguale all'altro moltiplicato per una costante, non per una funzione di t !!!

3° caso $\Delta < 0$. Il polinomio non ha radici reali, ma ha 2 radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$. Allora una base è $e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t)$, quindi la soluzione generale è

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Per le equazioni di ordine n a coeff. costanti omogenee

$$\sum_{k=0}^n a_k u^{(k)} = 0$$

↑ numeri

la situazione è analoga. Si prende il pol. caratteristico $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ e si vanno a vedere le radici. Quindi

→ ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di mult. 1 produce l'elemento $e^{\lambda t}$

→ ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di mult. m produce m elementi della base:

$$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda t}$$

→ ogni coppia di radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ di mult. 1 produce due elementi della base

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

→ ogni coppia $\alpha \pm i\beta$ di molteplicità m produce $2m$ elementi della base

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t), t e^{\alpha t} \cos(\beta t), t e^{\alpha t} \sin(\beta t), \dots,$$

$$t^{m-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t), t^{m-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

Oss. Gli elementi della base prodotti sono sempre esattamente n .

— o — o —