

# ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 084

Titolo nota

05/12/2012

Esempio 1  $\begin{cases} u' = \frac{u^2}{1+t^2} \\ u(0) = \frac{7}{7} \end{cases}$

① Separare:  $\frac{du}{dt} = \frac{u^2}{1+t^2} \quad \frac{du}{u^2} = \frac{dt}{1+t^2}$

② Integrare:  $\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dt}{1+t^2}$

$-\frac{1}{u} = \arctan t + c \Rightarrow \frac{1}{u} = -\arctan t + c$

③ Ricavare

$u(t) = \frac{1}{c - \arctan t}$

Sol. gen.  
eq. diff.

④ Determinare c

$u(0) = \frac{1}{c} = \frac{7}{7} \Rightarrow c = \frac{7}{7}$

$u(t) = \frac{1}{\frac{7}{7} - \arctan t}$

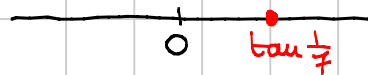
$u(t) = \frac{7}{1 - 7 \arctan t}$

Sol. problema  
di Cauchy

⑤ Verifica: fare!

⑥ Studiare la soluzione.

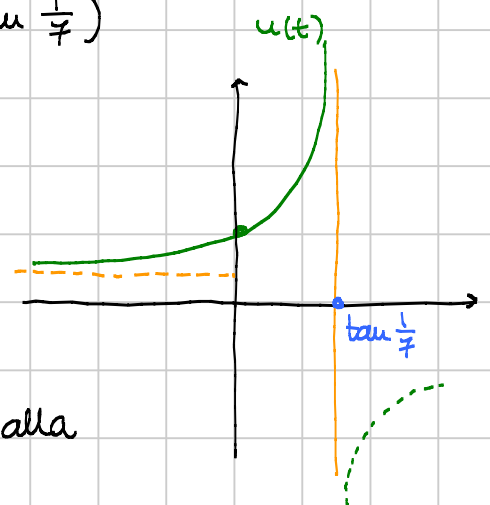
Ci sono problemi quando  $1 - 7 \arctan t = 0$ , cioè  $\arctan t = \frac{1}{7}$ , cioè  $t = \tan \frac{1}{7}$



Intervallo massimale di esistenza =  $(-\infty, \tan \frac{1}{7})$

Quindi LIFE SPAN =  $\tan \frac{1}{7}$ . Ora

$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = \left[ \frac{7}{0^+} \right] = +\infty$  quindi c'è blow-up.



Esempio 2

$\begin{cases} u' = \frac{u^2}{t^2+1} \\ u(0) = \frac{1}{7} \end{cases}$

Tutto uguale fino alla formula generale

$u(t) = \frac{1}{c - \arctan t}$

④ Determino il nuovo  $c$  :  $u(0) = \frac{1}{c} = \frac{1}{7} \Rightarrow c = 7$

$$u(t) = \frac{1}{7 - \arctan t}$$

Soluzione nuovo  
problema di Cauchy

⑤ Verifica: fare!

⑥ Studiare la soluzione Ora  $u(t)$  è definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$  in quanto  $7 - \arctan t > 7 - \frac{\pi}{2} > 0$  sempre.

In questo caso c'è esistenza globale, sia nel passato, sia nel futuro

Oss. La stessa equazione, cambiando le condizioni iniziali, fornisce soluzioni dal comportamento completamente diverso.

Esempio 2 in versione parametrica

$$u' = \frac{u^2}{1+t^2} \quad u(0) = \alpha$$

Vedere che succede al variare di  $\alpha$ . Come prima  $u(t) = \frac{1}{c - \arctan t}$

Impongo  $u(0) = \alpha$  :  $\frac{1}{c} = \alpha$ , quindi  $c = \frac{1}{\alpha}$ , quindi

$$u(t) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - \arctan t} = \frac{\alpha}{1 - \alpha \arctan t}$$

Soluzione del problema di Cauchy  
in funzione del dato iniziale

⑥ Studiare al variare di  $\alpha$ . Ci sono problemi quando  $\arctan t = \frac{1}{\alpha}$ .

Questa equazione ha soluzione se e solo se

$$\frac{1}{\alpha} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{\alpha} < \frac{\pi}{2}$$

cioè se e solo se  $\alpha > \frac{2}{\pi}$  oppure  $\alpha < -\frac{2}{\pi}$

Per i restanti valori di  $\alpha$ , cioè per  $\alpha \in \left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$  si ha che c'è esistenza globale.

Esempio 3  $u' = \frac{u^2}{1+t^2}$   $u(0) = 0$  Come sempre  $u(t) = \frac{1}{c - \arctan t}$

Determino  $c$ :  $u(0) = \frac{1}{c} = 0 \dots$  c'è un problema...

Noi sappiamo che la soluzione c'è per forza, grazie al teo. di esistenza ed unicità. In questi casi la soluzione è banale, ed è la costante  $u(t) = 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . La verifica è ovvia:  $0 = 0$ . Ovviamente l'intervallo massimale di esistenza è tutto  $\mathbb{R}$ .

Esempio 4  $\begin{cases} u' = u^3 t^2 \\ u(0) = -3 \end{cases}$  ① Separare:  $\frac{du}{dt} = u^3 t^2$ ;  $\frac{du}{u^3} = t^2 dt$

② Integrare:  $-\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} = \frac{1}{3} t^3 + c$

③ Ricavare:  $\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} = -\frac{1}{3} t^3 + c$ ,  $\frac{1}{u^2} = -\frac{2}{3} t^3 + c$

$$u^2 = \frac{1}{-\frac{2}{3} t^3 + c}$$

$$u(t) = \frac{1}{\pm \sqrt{-\frac{2}{3} t^3 + c}} = \frac{\sqrt{3}}{\pm \sqrt{c - 2t^3}}$$

Questa è la formula per la soluzione generale dell'eq. diff.

④ Determinare  $c$ :  $-3 = u(0) = \frac{\sqrt{3}}{\pm \sqrt{c}}$  Se prendo il segno + non ho speranze! a sx è  $< 0$ , a dx è  $> 0$ .

Quindi devo prendere il segno -:

$$-3 = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{c}}, \quad 3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{c}}, \quad 9 = \frac{3}{c}, \quad c = \frac{1}{3}$$

Soluzione del problema di Cauchy:  $u(t) = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{\frac{1}{3} - 2t^3}} = \frac{-3}{\sqrt{1 - 6t^3}}$

Oss. Per scegliere il segno  $\pm$  si prende quello che permette di determinare il valore di  $c$  sulla base della condizione iniziale.

⑤ Definita dove  $1 - 6t^3 > 0$ , cioè  $t^3 < \frac{1}{6}$ , cioè  $t < \sqrt[3]{\frac{1}{6}} = T$   
la soluzione ha esistenza globale nel passato e nel futuro ha blow-up per  $T = \sqrt[3]{\frac{1}{6}}$ .

Esempio 5  $\begin{cases} u' = u t^2 \\ u(0) = -3 \end{cases}$

①  $\frac{du}{dt} = u t^2 \quad \frac{du}{u} = t^2 dt$

②  $\int \frac{du}{u} = \int t^2 dt \quad ; \quad \log |u| = \frac{1}{3} t^3 + c$

③  $\log |u(t)| = \frac{1}{3} t^3 + c \Rightarrow |u(t)| = e^{\frac{1}{3} t^3 + c}$

$\Rightarrow u(t) = \pm e^{\frac{1}{3} t^3 + c}$

④ Determino c  $-3 = u(0) = \pm e^c$  . Scelgo segno -  
 $3 = e^c \Rightarrow c = \log 3 \Rightarrow u(t) = -e^{\frac{1}{3} t^3 + \log 3} = -3 e^{\frac{1}{3} t^3}$   
↑  
precorso

Esempio 6  $u' = \frac{-1}{u} \quad u(0) = 5$  ① Separare  $\frac{du}{dt} = \frac{-1}{u} ; u du = -dt$

② Integrare  $\int u du = -\int dt \quad ; \quad \frac{1}{2} u^2 = -t + c$

③ Ricavare  $u^2 = -2t + c \Rightarrow u(t) = \pm \sqrt{c - 2t}$

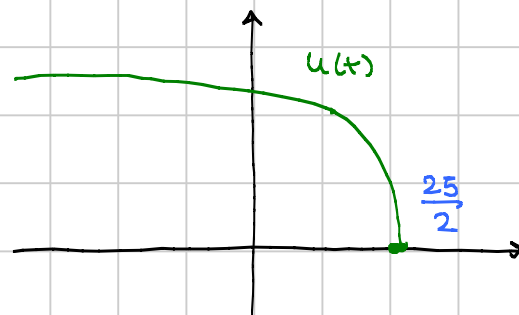
④ Determino c : scelgo segno + ;  $5 = u(0) = \sqrt{c} \Rightarrow c = 25$

Quindi  $u(t) = \sqrt{25 - 2t}$  Sol. problema di Cauchy

⑥ Definita quando  $25 - 2t \geq 0$ , cioè  $2t \leq 25$ , cioè  $t \leq \frac{25}{2} = T$

Cosa succede quando  $t \rightarrow \frac{25}{2}^-$

Dim  $\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = 0 \rightarrow \text{NO BLOW-UP}$



In questo caso  $u \rightarrow$  alla zona dove  $\frac{1}{u}$   
 ha problemi e anche si vede che  $u'(t) \rightarrow -\infty$ . C'è BREAK DOWN,