

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 093

Titolo nota

05/12/2012

Equazioni diff. a variabili separabili

$$u' = f(t) g(u)$$

Esempio $u' = u^2 \cos t$

① Separare

② Integrare

③ Ricavare

① Separare

$$\frac{du}{dt} = u^2 \cos t$$

Tutte le u a sx , tutte le t a dx

$$\frac{du}{u^2} = \cos t \, dt$$

② Integrare

As sx rispetto alla variabile u , a dx rispetto alla variabile t

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \cos t \, dt$$

$$-\frac{1}{u} = \sin t + c$$

③ Ricavare

Ricavare u in funzione di t

$$\frac{1}{u} = \sin t$$

$+ c$ ← Mettere $+c$ o $-c$ è la stessa cosa visto che c è una costante arbitraria

Quindi

$$u(t) = \frac{1}{-\sin t + c}$$

Soluzione generale dell'eq. diff.: al variare di c rappresenta le infinite soluzioni

Supponiamo ora di avere anche una condizione iniziale

$$\begin{cases} u' = u^2 \cdot \cos t \\ u(0) = 5 \end{cases}$$

④ Determinare c in modo da soddisfare la cond. iniz.

$$u(0) = 5$$

$$\frac{1}{\sin 0 + c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} = 5 \Rightarrow c = \frac{1}{5}$$

Posso ora scrivere la soluzione (unica) del problema di Cauchy:

$$u(t) = \frac{1}{-\sin t + \frac{1}{5}}$$

$$u(t) = \frac{5}{-5 \sin t + 1}$$

Soluzione problema di Cauchy

⑤ Verifica! (sia dell'eq., sia della cond. iniz.)

$$u(0) = \frac{5}{1} = 5 \quad \text{Ok.}$$

$$u'(t) = \frac{-5}{(-5 \sin t + 1)^2} (-5 \cos t)$$

$$= \frac{25 \cos t}{(-5 \sin t + 1)^2} = [u(t)]^2 \cdot \cos t$$

⑥ Studio della soluzione ottenuta

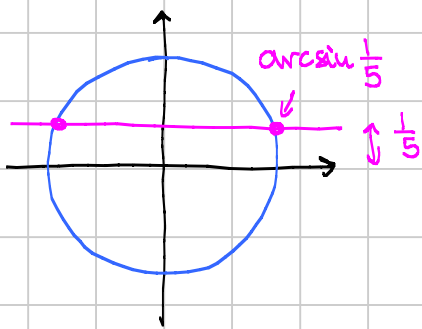
$$u(t) = \frac{5}{1 - 5 \sin t}$$

Def. Si dice intervallo massimale di esistenza il pezzo dell'insieme di definizione di $u(t)$ che contiene il tempo iniziale.

Nell'esempio la soluzione $u(t)$ è definita per $1 - 5 \sin t \neq 0$, $\sin t \neq \frac{1}{5}$.

Ora $\sin t = \frac{1}{5}$ se e solo se

$$t = \arcsin \frac{1}{5} + 2k\pi \quad t = \pi - \arcsin \frac{1}{5} + 2k\pi$$



Quindi nel nostro caso la funzione è definita per valori di t diversi dai precedenti



Intervallo massimale di esistenza = $(-\pi - \arcsin \frac{1}{5}, \arcsin \frac{1}{5})$.

— 0 — 0 —

Esempio 2
$$\begin{cases} u' = u^2 t^3 \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

① Separare $\frac{du}{dt} = u^2 t^3$; $\frac{du}{u^2} = t^3 dt$

② Integrare $\int \frac{du}{u^2} = \int t^3 dt$

$$-\frac{1}{u} = \frac{1}{4} t^4 + c$$

③ Ricavare $\frac{1}{u} = -\frac{1}{4} t^4 + c$ da cui $u(t) = \frac{1}{-\frac{1}{4} t^4 + c} = \frac{4}{-t^4 + c}$

$$u(t) = \frac{4}{c - t^4}$$

Soluzione generale dell'eq. diff.

si
(sarebbe 4c)

④ Determinare c Impongo $u(0) = 7$, cioè $\frac{4}{c} = 7$, cioè $c = \frac{4}{7}$

da cui $u(t) = \frac{4}{\frac{4}{7} - t^4} = \frac{28}{4 - 7t^4}$

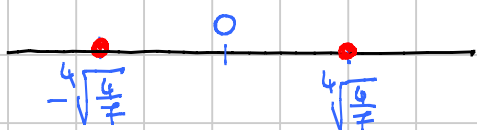
$$u(t) = \frac{28}{4 - 7t^4}$$

Soluzione
problema di
Cauchy

⑤ Verifica $u(0) = \frac{28}{4}$ ok, $u'(t) = -\frac{28}{(4 - 7t^4)^2} (-7 \cdot 4 \cdot t^3)$
 $= \frac{28^2}{(4 - 7t^4)^2} \cdot t^3 = [u(t)]^2 \cdot t^3$ ok

⑥ Studiare la soluzione La funzione $u(t)$ è definita quando

$$4 - 7t^4 \neq 0, \text{ cioè } 7t^4 \neq 4, \text{ cioè } t^4 \neq \frac{4}{7}, \text{ cioè } t \neq \pm \sqrt[4]{\frac{4}{7}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{7}}$$



L'intervallo massimale di esistenza è il pezzo dell'insieme di definizione che contiene il tempo iniziale $t=0$, cioè nel nostro caso l'intervallo

$$\left(-\sqrt[4]{\frac{4}{7}}, \sqrt[4]{\frac{4}{7}}\right)$$

Def. Si dice tempo di vita (LIFE SPAN) della soluzione (nel futuro) il sup dell'int. massimale di esistenza. Nell'esempio

$$\text{Tempo di vita} = \sqrt[4]{\frac{4}{7}}$$

Ora ci sono vari casi:

→ se il tempo di vita è $+\infty$ si dice che la soluzione ha ESISTENZA GLOBALE nel futuro

→ se il tempo di vita è $< +\infty$ (cioè è un numero T), allora si dice che la soluzione MUORE al tempo T e a quel punto ci sono 2 possibili cause:

1 - se $\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = \pm \infty$, si dice che la soluzione ha BLOW-UP al tempo T
scoppimento

Nell'esempio si ha che $\lim_{t \rightarrow \sqrt[4]{\frac{4}{7}}^-} u(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{28}{4-7t^4} = +\infty$ ↑ $[\frac{28}{0^+}]$

quindi nell'esempio si dice che la soluzione ha blow-up per $T = \sqrt[4]{\frac{4}{7}}$.

2 - se non c'è blow-up, una "u(t) esce dalla zona in cui il termine a dx dell'eq. è definito", allora si dice che la solus. ha

BREAK DOWN

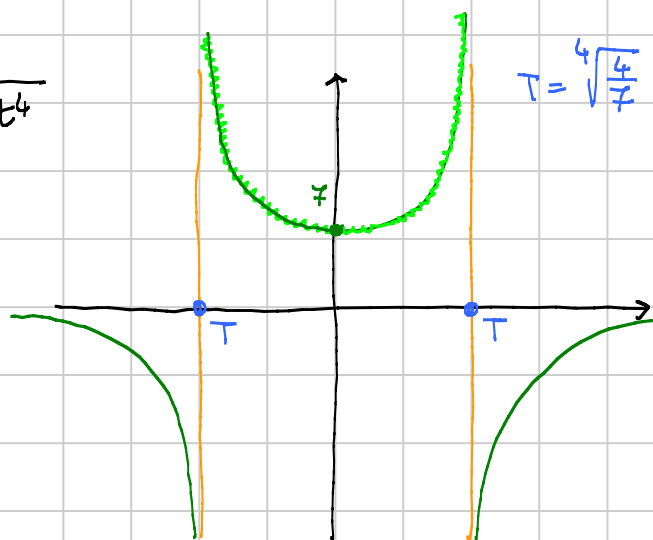
↑ rottura

In genere, ma non sempre, questo vuol dire che

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) = \pm \infty$$

Non scoppia la funzione,
ma scoppia la derivata.

Torniamo all'esempio: $u(t) = \frac{28}{4-7t^4}$



Nei modelli "mondo reale"

l'intervallo massimale di esistenza descrive il più grande insieme di tempi nei quali il risultato del modello può essere attendibile.