

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 092

Titolo nota

01/12/2012

Esempio 1 $u' = 2u$ Cerco una funzione la cui derivata sia il doppio di se stessa.

Una possibile soluzione è $u(t) = e^{2t}$

Un'altra soluzione è $u(t) = 8e^{2t}$

In realtà $u(t) = ce^{2t}$ è una soluzione per ogni $c \in \mathbb{R}$. In questo caso non ci sono altre soluzioni.

Esempio 2 $u'' = -u$

Una soluzione è $u(t) = \sin t$, Un'altra è $u(t) = \cos t$

Una famiglia infinita di soluzioni è $u(t) = c \sin t$ con $c \in \mathbb{R}$.

In realtà le funzioni del tipo

$$u(t) = a \cos t + b \sin t$$

sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione. Non solo sono infinite, ma posso giocare su 2 parametri.

Esempio 3 $u' = -u^2$ Una soluzione è $u(t) = \frac{1}{t}$ (sostituire!)

Le funzioni $u(t) = \frac{1}{t+c}$, al variare di $c \in \mathbb{R}$, sono tutte e sole le soluzioni dell'eq.

Fatto generale

Di solito un'eq. diff. ha infinite soluzioni dipendenti da un numero di parametri uguale all'ordine dell'eq. I parametri possono comparire ovunque nell'espressione,

PROBLEMA DI CAUCHY

Problema di Cauchy = equazione diff. + condizioni iniziali.

Le condizioni iniziali, per un'eq. di ordine k , prescrivono il valore di u e di tutte le sue derivate fino alla $(k-1)$ -esima per uno stesso valore di t .

Esempi Per un'eq. del 1° ordine il pb. di Cauchy si presenta così:

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

↑ ↑
numeri dati

Risolvere il problema di Cauchy vuol dire trovare, tra le infinite soluzioni dell'eq., quella o quelle che verificano la condizione iniziale

$$\begin{cases} u' = 2u \\ u(3) = 5 \end{cases} \quad \begin{aligned} &u(t) = c e^{2t} \text{ sono le infinite soluzioni} \\ &u(3) = 5 \text{ diventa } c e^6 = 5, \text{ da cui } c = 5 \cdot e^{-6} \\ &\text{Quindi il problema di Cauchy ha soluzione unica} \\ &u(t) = 5 e^{-6} \cdot e^{2t} \\ &= 5 e^{2t-6} \end{aligned}$$

Per un'eq. del 2° ordine il problema di Cauchy si presenta come

$$\begin{cases} u'' = f(u', u, t) \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \end{cases}$$

Si intende che t_0, u_0, u_1 sono numeri dati

$$\begin{cases} u'' + 3u' + 5u = \sin t \\ u(2) = 5 \\ u'(2) = 7 \end{cases}$$

↑
Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dots \\ u(2) = 5 \\ u'(3) = 5 \end{cases}$$

↑ DIVERSI

NO Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dots \\ u(2) = 5 \\ u''(2) = 7 \end{cases}$$

↑
NO problema di Cauchy: devo dare u e u'

Oss. In generale: per un'eq. diff. di ordine k ci aspettiamo una sol. generale dipendente da k parametri.

Il problema di Cauchy impone k equazioni.

Di solito le k equazioni permettono di determinare in maniera univoca il valore dei k parametri.

Teorema di ESISTENZA Consideriamo il problema di Cauchy per un'eq. diff. di ordine k in FORMA NORMALE

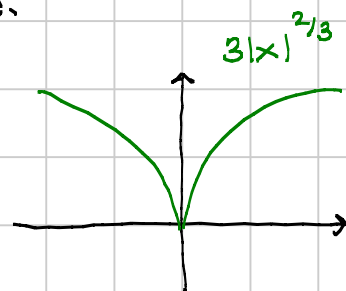
$$\begin{cases} u^{(k)} = F(u^{(k-1)}, \dots, u', u, t) \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(t_0) = u_{k-1} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \diagup \\ \diagdown \end{array} \quad k \text{ condizioni iniziali}$$

Se la funzione F è continua, allora il problema ha almeno una soluzione LOCALE, cioè una soluzione $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $t_0 \in (a, b)$.

Teorema di ESISTENZA e UNICITÀ Se F è un po' meglio di continua (diciamo derivabile), allora la soluzione del problema di Cauchy è UNICA, cioè le condizioni iniziali permettono di determinare univocamente i parametri.

Esempio Considero il problema

$$\begin{cases} u' = 3|u|^{2/3} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$



La funzione $f(x) = |x|^{2/3}$ è continua, ma non derivabile.

Una soluzione è $u(t) \equiv 0$ (funzione che vale sempre 0: verifica!)

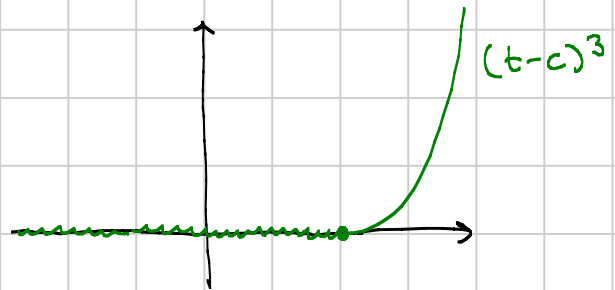
Un'altra soluzione è $u(t) = t^3$. Verifica: $u(0) = 0$

$$u'(t) = 3t^2$$

$$3|u(t)|^{2/3} = 3|t^3|^{2/3} = 3t^2$$

In questo caso ci sono solo 2 soluzioni, ma ce ne sono infinite, ad esempio quelle fatte così:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq c \\ (t-c)^3 & \text{per } t \geq c \end{cases} \quad \text{con } c > 0$$



Esercizio: verificare che sono soluzioni.

— o — o —