

**EQUAZIONI DIFFERENZIALI**

È un'equazione in cui l'incognita è una funzione. La funzione deve verificare una relazione che coinvolge la funzione stessa ed un po' di sue derivate.

Esempi  $u'(t) + [u(t)]^2 + t \sin u(t) = 0$

L'incognita è una funzione  $u(t)$ . Si intende che per ogni  $t$  appartenente all'insieme di definizione di  $u$  deve essere verificata la relazione.

Nota: anche l'insieme di partenza di  $u$  è tra le incognite.

L'insieme di arrivo è sempre  $\mathbb{R}$ .

$$u''(t) + u'''(t) + t^3 + u^4(t) = 0 \quad \text{Comparsano derivate 2° e 3°}.$$

Def. Si dice ORDINE di un'eq. diff. il massimo ordine di derivazione che compare.

In astratto un'eq. diff. di ordine  $k$  si presenta nella forma

$$\Phi(u^{(k)}(t), u^{(k-1)}(t), \dots, u'(t), u(t), t) = 0$$

per una opportuna funzione  $\Phi$ .

Def. Un'eq. diff. si dice in FORMA NORMALE se la derivata di ordine massimo è "ricavata" rispetto al resto, cioè l'eq. si presenta nella forma

$$u^{(k)}(t) = F(u^{(k-1)}(t), \dots, u'(t), u(t), t)$$

## Esempi

$$u''(t) = [u'(t)]^2 + \cos t$$

Ok: in forma normale

$$[u'(t)]^3 + \cos u(t) = t^2$$

Non è in forma normale, ma è facile portarcela

$$u'(t) = \sqrt[3]{t^2 - \cos u(t)}$$

$$[u'(t)]^2 = u(t)$$

Non è in forma normale e non è possibile portarcela in maniera univoca.

## Notazione rapida

Omettere l'esplicita dipendenza da  $t$ . I 3 esempi precedenti diventano

$$u'' = [u']^2 + \cos t$$

$$(u')^3 + \cos u = t^2$$

$$(u')^2 = u$$

↑  
rimane perché  $u$  o  
è argomento della  $u$  o  
di qualche sua derivata.

Def. Un'eq. diff. si dice AUTONOMA se la  $t$  compare solo come argomento della  $u$  e delle sue derivate (quindi in notazione rapida non c'è proprio).

Altrimenti si dice NON AUTONOMA.

— o — o —

Nel corso esamineremo 3 situazioni speciali

**1° CASO** Equazioni del 1° ordine a variabili separabili

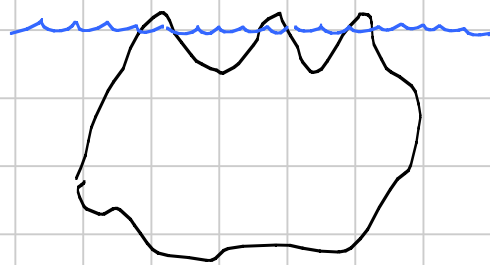
Sono eq. diff. del 1° ordine in forma normale, in cui il termine a dx è il prodotto di una funzione della sola  $t$  per una funzione della sola  $u$ .

$$u' = F(u, t)$$

Forma normale

$$u' = f(t) \cdot g(u)$$

1° ISOLA



Esempi

$$u' + t = tu$$

$$u' = t(u-1)$$

OK

$$u' = t^2 \cdot u^3$$

OK subito

$$u' = u^4$$

$$u' = \underset{\substack{\uparrow \\ f(t)}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ g(u)}}{u^4}$$

Fatto generale: tutte le eq. diff. del 1° ordine in forma normale AUTONOME si scrivono come

$$u' = \varphi(u) = \underset{\substack{\uparrow \\ f(t)}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ g(u)}}{\varphi(u)}$$

quindi sono anche a VARIABILI SEPARABILI.  
— o — o —

Def. Un'eq. diff. si dice LINEARE se "la  $u$  e le sue derivate compaiono di 1° grado e non all'interno di funzioni", cioè se è della forma

$$a_k(t) u^{(k)} + a_{k-1}(t) u^{(k-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = f(t)$$

$$\sum_{n=0}^k \boxed{a_n(t)} u^{(n)} = \boxed{f(t)}$$

$\uparrow$  coeff.  $\uparrow$  termine noto

$\uparrow$   
A sx c'è una comb. lineare di  $u$  e delle sue derivate con coeff. che possono dipendere da  $t$ .

Un'eq. diff. lineare si dice OMOGENEA se  $f(t) \equiv 0$ .

Esempi

$$\boxed{1} u'' + \boxed{3t} u' + \boxed{t^2} u = \sin t$$

$\uparrow$   $a_2(t)$   $\uparrow$   $a_1(t)$   $\uparrow$   $a_0(t)$   $\uparrow$   $f(t)$

$$u' + t^2 u = t^3$$

$\uparrow$   
lineare

$$u' + t u^2 = t^3$$

$\uparrow$   
colpevole della NON linearità

$$u' + \cos(tu) = t^3$$

$\uparrow$   
NON LINEARE perché  $u$  compare all'interno di una funzione

$$u'' + \boxed{u' u} = 0$$

$\uparrow$   
NON LINEARE

Def. Un'eq. diff. lineare si dice A COEFFICIENTI COSTANTI se i coeff.  $a_k(t), a_{k-1}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$  non dipendono da  $t$  ma sono dei numeri, cioè delle costanti.

Oss. → Un'eq. diff. lin. a coeff. costanti è autonoma?

NO! Può esserci  $f(t)$  !!!

→ Un'eq. diff. lin. autonoma è omogenea?

NO! Infatti  $f(t)$  può essere una costante  $\neq 0$ , ad esempio  
 $u'' + u' = 7$

2° caso Eq. del 1° ordine lineari  $a_1(t) u' + a_0(t) u = f(t)$   
Supponendo di poter dividere per  $a_1(t)$ , l'eq. diventa della forma

$$u' + a(t)u = b(t)$$

3° caso Eq. lineari di ordine  $k$  a coeff. costanti, omogenee e non omog.

$$\sum_{n=0}^k a_n u^{(n)} = f(t)$$

$$a_k u^{(k)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f(t)$$

Esempi  $u'' = tu' + t^2 u + \sin t$  lineare, 2° ordine, forma normale,  
non autonoma, coeff. NON costanti

$u''' = 7u + \sin t \rightarrow$  rientra nel 3° caso

$u' + tu = t \rightarrow$  rientra nel 2° caso  
 $\rightarrow$  rientra nel 1° caso  $u' = \overset{f(t)}{t} (1 - \overset{g(u)}{u})$

$u' = -7u \rightarrow$  1° ordine, lineare, autonoma, omogenea.  
Rientra in tutti i 3 casi.