

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 090

Titolo nota

01/12/2012

Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

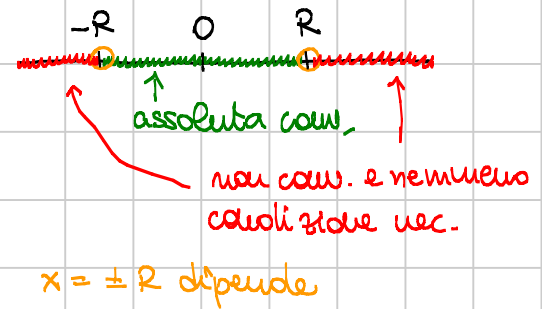
↑
coefficienti

Domande: 1 - per quali x converge
2 - a cosa converge

Risposta domanda 1: raggio di convergenza

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad (\text{supposto che esista})$$

$$R = \frac{1}{L}$$



Risposta domanda 2: serie di Taylor: data $f(x)$ si costruisce

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

che è la serie che ha come somme parziali i polinomi di Taylor di $f(x)$.

Per certe funzioni particolari, dette funzioni ANALITICHE, si ha che la serie di Taylor DOVE CONVERGE (cioè all'interno del raggio di convergenza più eventuali estremi) converge proprio a $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \text{DOVE CONVERGE}$$

Metateorema: tutte le funzioni ottenute a partire da quelle elementari con operazioni algebriche e/o composizioni sono analitiche dove non presentano problemi burocratici.

Oss. Per dimostrare l'analiticità di una certa funzione spesso si usa Taylor - Lagrange.

Esempio 1 $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

quindi la serie iniziale (dove converge) converge a $-\log(1-x)$.

Si vede bene che la zona di convergenza è $[-1, 1)$, quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x) \quad \forall x \in [-1, 1)$$

Esempio 2 $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1)$

Si può vedere in 2 modi: $\rightarrow$ come serie geometrica

$\rightarrow$ come serie di Taylor di $(1-x)^{-1}$

Oss. La derivata della serie dell'esempio 1 è la serie dell'esempio 2

La derivata della somma dell'esempio 1 è la somma dell'esempio 2.

Teorema di scambio per le derivate

La derivata di una serie di Taylor è la serie delle derivate.

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$\uparrow$
prima la serie, poi la derivata

$\uparrow$
prima la derivata, poi la serie

Inoltre le 2 serie hanno lo stesso raggio di convergenza, ma eventualmente il comportamento negli estremi può cambiare.

Oss. Ci sono degli esempi di serie di funzioni per cui non vale il teo di scambio, cioè la derivata della serie non è la serie delle derivate.

Esempio 3

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots$$

$$(\arctan x)' = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \right)'$$

Esempio 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$$

$$= x (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots)$$

$$= x (x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)'$$

$$= x (-1 + 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)'$$

fatto prima

$$= x \left(-1 + \frac{1}{1-x} \right)'$$

$$= x \left(\frac{-1 + x + 1}{1-x} \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)'$$

$$= x \frac{1 - x + x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Teorema di
scambio

Conclusione

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

DOVE CONVERGE

(cioè $\forall x \in (-1, 1)$)

Questo aiuta a calcolare somme di numeri, per esempio con $x = \frac{1}{2}$ si ottiene che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

Esempio 5

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(n+2)!} \quad (\text{Intanto converge...})$$

La vedo come caso $x=5$ della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$

$$= \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \dots = \frac{1}{x^2} \underbrace{\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)}_{e^x - 1 - x}$$

Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \quad \text{DOVE CONVERGE } (\forall x \in \mathbb{R})$$

Questa funzione ha un limite ($\frac{1}{2}$) per $x \rightarrow 0$

Ponendo $x = 5$ ho la risposta alla domanda iniziale.

Esempio 6

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} x^{2n+1} = x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} x^{2n}$$

barba saper fare questa

Posto $y = x^2$, mi ritrovo $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} y^n$

Ora $\frac{n}{n^2-1} = \frac{n}{(n+1)(n-1)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n-1} = \frac{An - A + Bn + B}{(n+1)(n-1)}$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ B-A=0 \end{cases} \quad A=B=\frac{1}{2}, \text{ quindi } \frac{n}{n^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right), \text{ quindi}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} y^n &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{y} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2} y \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^{n-1}}{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{y} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{y^n}{n} + \frac{1}{2} y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} \\ &\quad -\log(1-y) - y - \frac{y^2}{2} \quad -\log(1-y) \end{aligned}$$

Barba fare le moltiplicazioni e poi mettere x^2 al posto di y .

— o — o —