

# ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 089

Titolo nota

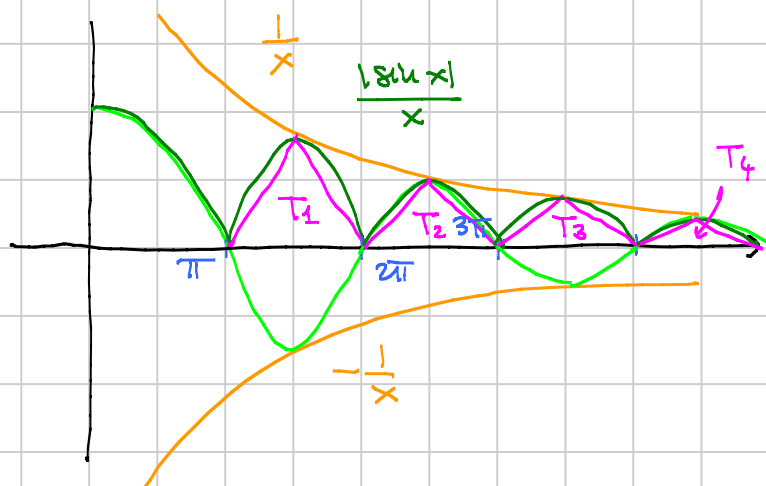
30/11/2012

## METODO DEI TRIANGOLINI Le serie aiutano gli integrali

Esempio 1  $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx.$

Anche qui se faccio il confronto  $0 \leq \frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x}$  non posso concludere nulla in quanto  $\int \frac{1}{x} dx$  con problema a  $+\infty$  diverge.

Voglio dim. che l'integrale improprio diverge, cioè che l'area sotto il grafico è  $+\infty$



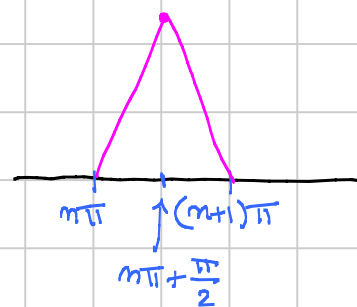
Geometricamente è chiaro che

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \text{somma aree triangolini} = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n)$$

Base  $T_n = \pi$

Altezza  $T_n$  = valore della funzione nel p.to medio della base

$$= \frac{|\sin(n\pi + \frac{\pi}{2})|}{n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$



Quindi

$$\begin{aligned} \text{Area}(T_n) &= \text{Base} \cdot \text{Altezza} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \pi \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

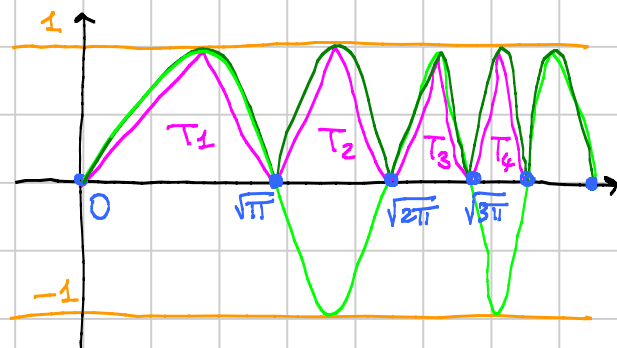
Conclusione

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = +\infty$$

$\uparrow$   
C.A. con  $\frac{1}{n}$

Esempio 2  $\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx$

Voglio dimostrare che l'integrale diverge a  $+\infty$ . Piazzo sotto dei triangolini.



Altezza ( $T_n$ ) = 1

$\sin(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = k\pi \Leftrightarrow x = \sqrt{k\pi}$ , quindi

Base ( $T_n$ ) =  $[\sqrt{(n-1)\pi}, \sqrt{n\pi}]$ , quindi Lunghezza Base =  $\sqrt{\pi} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

Area ( $T_n$ ) =  $\frac{1}{2}$  Base · Altezza =  $\frac{\sqrt{\pi}}{2} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

La conclusione è come prima:

$$\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = +\infty$$

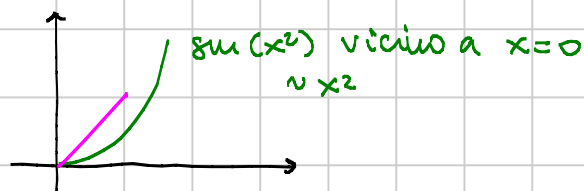
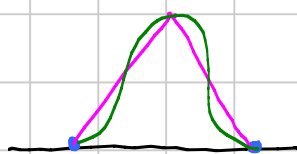
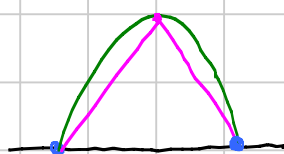
Infatti  $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \cdot \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{n - n + 1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$

quindi la serie diverge per confronto asintotico con  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Allo stesso modo si trattano gli integrali del tipo

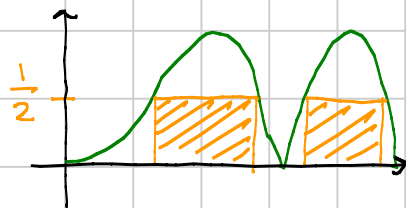
$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^a} dx \quad \text{con } a \leq 1 \qquad \int_0^{+\infty} |\cos(x^a)| dx \qquad \int_0^{+\infty} |\sin(x^a)| dx \quad \text{con } a > 0$$

Oss. Ho barato pesantemente ... Avevi dovuto dimostrare rigorosamente che i triangolini stanno davvero sotto la funzione.

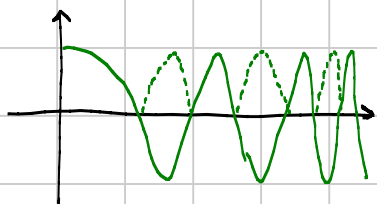


Per sistemare la cosa si possono sostituire i triangolini con i rettangolini fatti prendendo ad esempio altezza  $\frac{1}{2}$

Le altezze dei rettangoli sono  $\frac{1}{2}$ , le basi si calcolano imponendo  $\sin(x^2) = \frac{1}{2} \dots$



Oss. Come interpretare che  $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$  converge e  $\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx = +\infty$



$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx =$  somma aree, tutte con il segno positivo

$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx =$  somma aree prese a segno alternato, quindi ci sono "compensazioni".

È lo stesso fenomeno che fa sì che

$\sum \frac{1}{n}$  diverge e  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  converge

Oss. Per gli integrali impropri non c'è la condizione necessaria, cioè può accadere che

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$  converge, ma non è vero che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

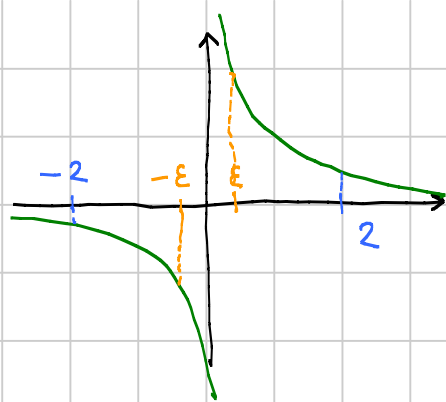
L'esempio è proprio  $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$

[Si potrebbe dimostrare che il limite non può esistere ed essere  $\neq 0$ .  
L'unica possibilità è che sia 0 oppure non esista].

— 0 — 0 —

Oss. Perché  $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^3} dx$  non è 0?

La funzione sarebbe dispari.



Se uno vuole che  $\int \frac{1}{x^3} dx$  fatto su

$[-2, 2] \setminus$  buco di ampiezza piccola intorno a 0 abbia un limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , allora questo non si realizza.

Il limite cioè dipende da come ho costruito il buco

$$\int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3} dx + \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{x^3} dx \quad (\text{Buco simmetrico})$$

RISULTATI DIVERSI!

$$\int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3} dx + \int_{2\varepsilon}^2 \frac{1}{x^3} dx \quad (\text{Buco asimmetrico})$$

$$\int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3} dx + \int_{\varepsilon^2}^2 \frac{1}{x^3} dx$$

Questo non accade quando l'integrale converge!