

INTEGRALI OSCILLANTI

Trucco dell'integrazione per parti.

Esempio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

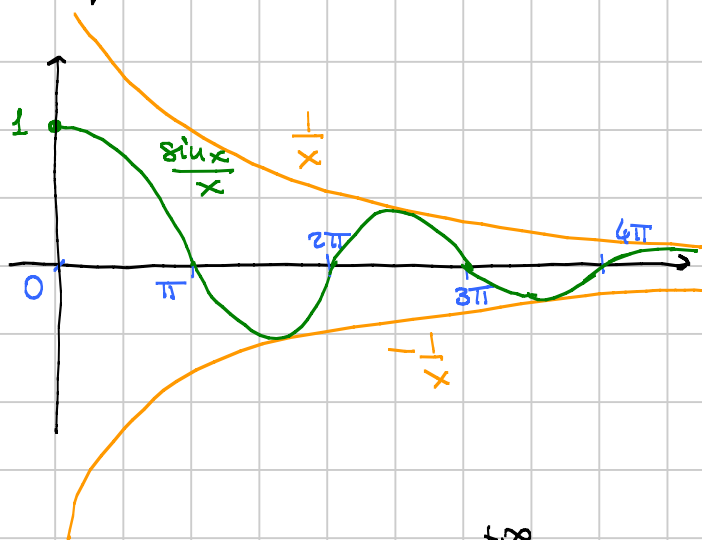
Il segno dell'integranda è variabile

L'integrale improprio ha unico problema a $+\infty$.Infatti l'integranda tende ad $\pm$ quando $x \rightarrow 0$, dunque è limitata vicino ad $x=0$.

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Oss. $\int_0^5 \frac{\sin x}{x} dx$ è un inte=

grale PROPRIO (funzione limitata su zona limitata).



Se provo con l'assoluta convergenza mi riduco a studiare $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$

Ora provo con un confronto: $\frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x}$

Ora $\int \frac{1}{x} dx$ con problema a $+\infty$ diverge, quindi BOH (sarebbe andata bene se in partenza avessi avuto $\int \frac{\sin x}{x^a} dx$ con $a > 1$)

Approccio alternativo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \underbrace{\int_0^5 \frac{\sin x}{x} dx}_{\text{Numero}} + \int_5^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Studio il restante integrale usando la definizione

$$\int_5^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_5^A \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_5^A \underbrace{\frac{1}{x}}_F \cdot \underbrace{\sin x}_g dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{\frac{1}{x}}_F \underbrace{(-\cos x)}_G \right]_5^A - \int_5^A \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_f \underbrace{(-\cos x)}_G dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{\cos A}{A} + \frac{\cos 5}{5} - \int_5^A \frac{\cos x}{x^2} dx \right\}$$

$$= \frac{\cos 5}{5} - \int_5^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

essermi spostato in 5 serve per non dover sostituire $x=0$ al denominatore.

Ora

$$\int \frac{1}{x^2} dx \text{ con problema a } +\infty \text{ converge, quindi } \left(0 \leq \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \right. \\ \left. + \text{confronto} \right)$$

$$\int \frac{|\cos x|}{x^2} dx \text{ converge, quindi (assoluta integrabilità)}$$

$$\int \frac{\cos x}{x^2} dx \text{ converge}$$

Di conseguenza anche $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge.

Oss. Lo stesso trucco funziona per integrali del tipo $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx$ con $a > 0$.

Infatti integrando per parti mi ritrovo x^{a+1} al denominatore.

La stessa cosa va bene anche per integrali del tipo

$$\int_b^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a} dx \text{ con } a > 0 \text{ e } b > 0$$

Esercizio $\int_0^5 \frac{\cos x}{x} dx$ Questo è improprio!

Inoltre $\frac{\cos x}{x} \sim \frac{1}{x}$ per $x \sim 0$, quindi diverge.

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$

Il grafico oscilla tra -1 e 1 e l'effetto di x^2 è di rendere le oscillazioni sempre più rapide.



Dove si annulla? Dove

$$\cos(x^2) = 0, \text{ cioè } x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ cioè } x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{2k+1}$$

e $1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{9}, \dots$ sono sempre più ravvicinati.

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \underbrace{\int_0^5 \cos(x^2) dx}_{\text{Numero}} + \underbrace{\int_5^{+\infty} \cos(x^2) dx}_{\text{Basta studiare questo}}$$

$$\int_5^{+\infty} \cos(x^2) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_5^A \cos(x^2) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_5^A \underbrace{\frac{1}{x}}_F \cdot \underbrace{x \cos(x^2)}_g dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \left[\underbrace{\frac{1}{x}}_F \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \sin(x^2)}_G \right]_5^A - \int_5^A \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_F \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \sin(x^2)}_G dx \right\}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{\frac{\sin(A^2)}{2A}}_0 - \underbrace{\frac{\sin(25)}{10}}_{\text{Numero}} + \frac{1}{2} \int_5^A \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx \right\}$$

$$= \text{Numero} + \frac{1}{2} \int_5^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$$

Ora $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge $\Rightarrow \int_5^{+\infty} \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} dx$ converge $\Rightarrow \int_5^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$ conv.

$\uparrow$ confronto $\frac{|\sin(x^2)|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$
 $\uparrow$ Assoluta integrabilità

Di conseguenza anche $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ converge.

Allo stesso modo si fanno

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^a) dx \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^a) dx \quad \text{purché } a > 1$$

Oss. Cosa succede per $a = 1$?

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos x dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \cos x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\sin x]_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} (\sin A - \sin 0) = \text{N.E.} \quad (\text{fatto a suo tempo}) \end{aligned}$$

Quindi l'integrale è indeterminato.

Cosa succede per $a = \frac{1}{2}$, cioè per $\int_5^{+\infty} \cos \sqrt{x} dx$. Come prima mi riduco a

$$\int_5^{+\infty} \cos \sqrt{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_5^A \cos \sqrt{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_5^A \underbrace{\sqrt{x}}_F \underbrace{\frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}}_g dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{[\sqrt{x} \cdot 2 \sin \sqrt{x}]}_{F \quad G} \Big|_5^A - \int_5^A \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{F'} \cdot \underbrace{2 \sin \sqrt{x}}_G dx \right\}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ 2\sqrt{A} \sin \sqrt{A} - 2\sqrt{5} \sin \sqrt{5} - \int_5^A \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \right\} \quad [2 \cos \sqrt{x}]_5^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ 2\sqrt{A} \sin \sqrt{A} - 2\sqrt{5} \sin \sqrt{5} + \underbrace{2 \cos \sqrt{A}}_{\text{Numero}} - \underbrace{2 \cos \sqrt{5}}_{\text{Numero}} \right\}$$

$$= \text{Numero} + \lim_{A \rightarrow +\infty} 2\sqrt{A} \sin \sqrt{A} + 2 \cos \sqrt{A} = \text{N.E.}$$

Basta scegliere $A_n \rightarrow +\infty$ con $\sin \sqrt{A_n} = 1$

$A_n \rightarrow +\infty$ con $\sin \sqrt{A_n} = 0$.