

**CONFRONTI SERIE - INTEGRALI** Gli integrali aiutano le serie...

Sia  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione tale che

- (i)  $f(x) > 0$  per ogni  $x \geq 0$ ,
- (ii)  $f(x)$  è debolmente decrescente

Osservazione geometrica:

Area dei rettangoli "sotto"  $\leq$   
 Area sotto la funzione  $f(x) \leq$   
 Area dei rettangoli "sopra"

$$\text{Area sotto funzione} = \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

Somma aree dei rettangoli "sopra"

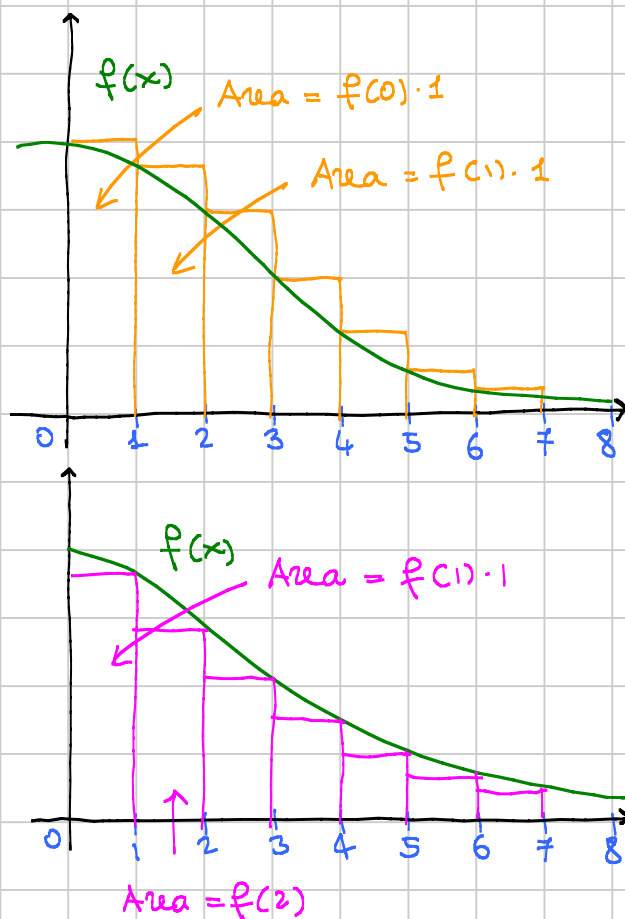
$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

↑ area rettangolo con base 1  
e altezza  $f(n)$

$$\text{Somma aree rettangoli "sotto"} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

In conclusione abbiamo dimostrato che

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_0^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$



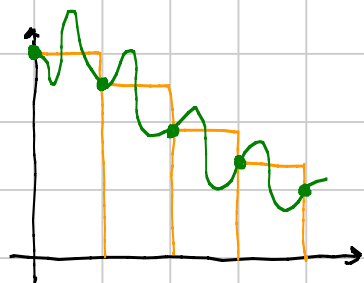
Ora

- ① Se l'integrale improprio converge, quando la disug. di  $s_n$  e deduco che anche la serie converge
- ② Se l'integrale improprio diverge, quando la disug. di  $d_n$  e deduco che anche la serie diverge.

Non ci sono altri comportamenti possibili. Inoltre la serie di  $s_n$  converge se e solo se la serie di  $d_n$  converge (differiscono di un solo termine).

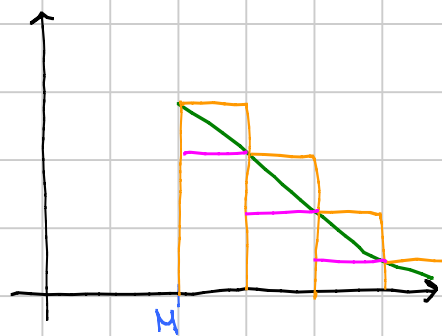
Conclusione: la serie e l'integrale improprio si comportano allo stesso modo (se  $f(x) > 0$  e debolm. dec.)

Oss. Ho usato la monotonia di  $f(x)$  per fare le osservazioni geometriche



Variaute Supponiamo ora che  $f: [M, +\infty)$  con  $M$  intero positivo e debolmente decrescente. Allora

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} f(n) \leq \int_M^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=M}^{+\infty} f(n)$$



Nel caso  $M=0$  si riottiene la formula precedente.

Esempio 1  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \frac{1}{x^a}$  è decrescente

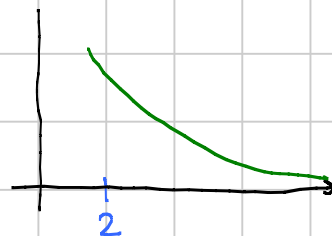
Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \text{ converge se e solo se } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx \text{ converge}$$

e abbiamo dimostrato che l'integrale converge se e solo se  $a > 1$ .

Esempio 2 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n}$$



Considero  $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \frac{1}{x \log^a x}$ .

È decrescente (anche strettamente) perché il numeratore è fisso, ed il denominatore è positivo e strett. crescente.

Per il confronto serie - integrali ho che la serie si comporta come

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^a x} dx$$

L'integrale lo studio con la definizione

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^a x} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{1}{x \log^a x} dx \stackrel{a \neq 1}{=} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{1-a} \frac{1}{\log^{a-1} x} \right]_2^A \\ &= \frac{1}{1-a} \left\{ \frac{1}{\log^{a-1} A} - \frac{1}{\log^{a-1} 2} \right\} \end{aligned}$$

Ora  $\rightarrow$  se  $a-1 > 0$ , cioè  $a > 1$  il termine  $\frac{1}{\log^{a-1} A} \rightarrow 0$ , quindi l'integrale converge

$\rightarrow$  se  $a-1 < 0$ , cioè  $a < 1$  il termine  $\frac{1}{\log^{a-1} A} \rightarrow +\infty$ , quindi l'integrale diverge a  $+\infty$

Resterebbe da trattare a parte il caso  $a=1$  in cui  $\int \frac{1}{x \log x} dx = \log |\log x|$  in cui ancora l'integrale diverge.

Esempio 3 Consideriamo la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \arctan n = 5$

È facile dimostrare che la serie converge (ad esempio con il criterio della radice o del rapporto).

Problema: ottenere un valore approssimato per la somma della serie.

Se io sommo i termini da 0 fino ad un certo  $M$ , quale errore commetto?

Chiamiamo  $S$  la somma. Allora avremo che

$$0 \leq S - \sum_{n=0}^M \frac{n+1}{2^n} \arctan n = \sum_{n=M+1}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} \arctan n \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=M+1}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}$$

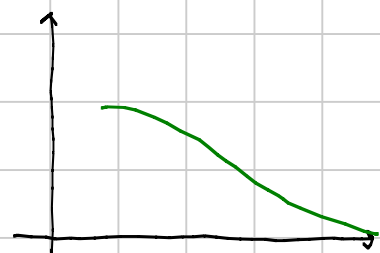
Ora per la disuguaglianza di confronto serie - integrali, si ha che

$$\sum_{n=M+1}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} \leq \int_M^{+\infty} \frac{x+1}{2^x} dx \quad \text{se sappiamo che } f(x) = \frac{x+1}{2^x} \text{ è}$$

positiva e decrescente.

$f(x) = (x+1) \cdot 2^{-x}$  almeno da un certo punto  
in poi è decrescente

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2^{-x} + (x+1) 2^{-x} (-\log 2) \\ &= 2^{-x} (1 - \log 2 x - \log 2) \end{aligned}$$



Anche l'integrale si calcola

$$\begin{aligned} \int_M^{+\infty} (x+1) \cdot 2^{-x} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_M^A (x+1) \cdot 2^{-x} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ (x+1) \left( -\frac{1}{\log 2} \cdot 2^{-x} \right) + \int \frac{1}{\log 2} \cdot 2^{-x} dx \right\}_M^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{x+1}{\log 2} \cdot 2^{-x} - \frac{1}{\log^2 2} \cdot 2^{-x} \right]_M^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \underbrace{-\frac{A+1}{\log 2} \cdot 2^{-A}}_{\downarrow 0} - \underbrace{\frac{1}{\log^2 2} \cdot 2^{-A}}_{\downarrow 0} + \frac{M+1}{\log 2} \cdot 2^{-M} + \frac{1}{\log^2 2} \cdot 2^{-M} \right] \end{aligned}$$

Quindi, prendendo per esempio  $M = 10$ , abbiamo che

$$0 \leq S - \sum_{n=0}^{10} \frac{n+1}{2^n} \cdot \arctan n \leq \left( \frac{11}{\log 2} \cdot \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{\log^2 2} \cdot \frac{1}{2^{10}} \right) \frac{\pi}{2}$$

Quindi con solo 10 termini si ottiene un errore dell'ordine di  $\frac{11}{2^{10}}$ .