

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 086

Titolo nota

29/11/2012

Esempio 1 $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ ora l'integranda ha segno variabile

Uso l'assoluta integrabilità, cioè studio $\int_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$

Ora $\frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ per ogni $x > 0$. Quindi

$\int \frac{1}{x^2} dx$ con unico problema a $+\infty$ converge (esp. $2 > 1$)

Allora per confronto $\int \frac{|\sin x|}{x^2} dx$ con unico problema a $+\infty$ converge.

Allora per assoluta integrabilità anche $\int \frac{\sin x}{x^2} dx$ con pb. a $+\infty$ converge.

Esempio 2 $\int_0^{20} \frac{\sin x}{x^2} dx$ Ora vicino a $x=0$ l'integranda è > 0 , quindi posso usare i criteri per integrande ≥ 0 . Vedendo

$$\int_0^{20} = \boxed{\int_0^1} + \boxed{\int_1^{20}}$$

↓ Qui l'integranda è ≥ 0 .
Integrale proprio, quindi un numero

Ora $\frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ vicino a 0, quindi l'integrale diverge

Formalmente: confronto asintotico con $\frac{1}{x} = g(x)$.

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ Integranda ≥ 0 , unico problema a $+\infty$

Faccio confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^7}$, che mi darebbe convergenza

$$\text{Faccio } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} \cdot x^7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7}{e^{x^2}} = 0 \text{ Caso limite}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0, \text{ quindi } \frac{f(x)}{g(x)} < 1 \text{ vicino al problema, quindi } f(x) < g(x) \right]$$

Ora $\int g(x) dx$ con unico problema a $+\infty$ converge, quindi $\int e^{-x^2} dx$ con unico problema a $+\infty$ converge pure.

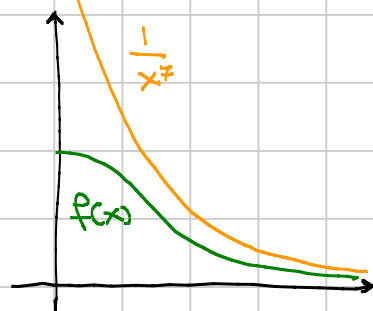
Achtung! $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = +\infty$ per colpa del problema in $x=0$, ma questo non vuol dire che $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = +\infty$, anzi !!!

Esempio 4 $\int_0^1 \log x dx$ improprio con unico problema in $x=0$.

L'integranda è a segno costante, ma negativa.

Volevamo di più portare il segno - fuori

$$\int_0^1 \log x dx = - \int_0^1 (-\log x) dx$$



Provo a fare il confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ che dovrebbe conv.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\sqrt{x}}_{\downarrow 0} \underbrace{(-\log x)}_{\downarrow +\infty} = 0 \quad \text{Tabellina}$$

[quindi $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$ vicino a $x=0$, quindi $f(x) < g(x)$ vicino a $x=0$, quindi]

poiché $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ con unico pb. a 0 conv., anche $\int \log x dx$ con unico problema a 0 converge.

$$\text{Esempio 5} \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) = 0$$

NO!! È un integrale improprio e come tale va trattato.

$$\text{C'è un problema in } x=0, \text{ quindi } \int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \underbrace{\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx}_{-\infty} + \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx}_{+\infty}$$

Per definizione il globale è INDETERMINATO.

per simmetria (tabellina)

Cosa fare se il problema è in un pto diverso da 0 o da $+\infty$?

Si sposta il problema con un cambio di variabili

Esempio 6 $\int_1^2 \frac{1}{x^2-1} dx$ c'è un problema in $x=1$.

Pongo $y = x-1$ Quando $x=1$ ho che $y=0$
 $dy = dx$ Quando $x=2$ ho che $y=1$
 $x = y+1$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(y+1)^2-1} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{y^2+2y+1-1} dy = \int_0^1 \frac{1}{y^2+2y} dy$$

Questo si comporta come $\int \frac{1}{y}$ con problema a 0, quindi diverge.

Fatti generali

$\int_a^b \frac{1}{|x-a|^\alpha} dx$ $\nearrow$ converge se $\alpha < 1$
 $\searrow$ diverge a $+\infty$ se $\alpha \geq 1$

$\int_a^b \frac{1}{|b-x|^\alpha} dx$ $\nearrow$ converge se $\alpha < 1$
 $\searrow$ diverge a $+\infty$ se $\alpha \geq 1$

(Con un cambio di variabili basta spostare il problema in $x=0$)

Esempio 7 $\int_1^3 \frac{1}{\log x} dx$ Problema in $x=1$, per il resto $f(x) \geq 0$.

Pongo $y = x-1$, da cui $dy = dx$ e $x = y+1$

Quando $x=1$ ho che $y=0$, quando $x=3$ ho che $y=2$

$$= \int_0^2 \frac{1}{\log(y+1)} dy$$

Ora $\frac{1}{\log(1+y)} \sim \frac{1}{y}$, quindi l'integrale diverge

Formalmente basta fare il conf. asint. con $g(y) = \frac{1}{y}$. Si ritrova

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1 \neq 0 \neq +\infty \quad \dots$$

Esempio 8 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} dx$ Problema in 1 e a $+\infty$. Quindi spesso

Problema a $+\infty$ $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}$ $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ converge

Confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$...

Problema in 1 Volendo si fa il cambio di variabili...

In alternativa $\frac{1}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}}$
 $\uparrow$ colpevole dell'improprietà dell'integrale

Quindi l'integrale si comporta come l'integrale di $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ con problema in 1. Questo è in tabellina e converge perché l'esponente è $\frac{1}{2} < 1$.

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^3-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{\cancel{x-1}(x^2+x+1)}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi gli integrali hanno lo stesso comportamento.