

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 085

Titolo nota

29/11/2012

Integrali impropri → Spezzare in integrali MONOPROBLEMA
→ Studiare i singoli pezzi (capire se convergono o no)

Integrandi $f(x) \geq 0$

→ Confronto
→ Confronto asintotico ↗ casi standard
↳ casi limite

Integrandi a segno qualunque

→ Assoluta integrabilità
→ Trucco integr. per parti
→ Metodo triangolini

Fatto fondamentale Se $f(x) \geq 0$, allora l'integrale improprio può solo convergere o divergere a $+\infty$.

Criterio del confronto Supponiamo che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in E$.
Allora valgono le seguenti implicazioni:

↓ in realtà basta per ogni x
"vicino al problema"

$$\int_E g(x) dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx < +\infty$$

$$\int_E f(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_E g(x) dx = +\infty$$

(Nota: si intende che gli integrali considerati sono MONOPROBLEMA, ed E indica l'insieme di integrazione, che può essere un intervallo o una semiretta)

Achtung! Tutte le altre implicazioni sono abusive.

Criterio del confronto asintotico

Consideriamo 2 integrali impropri
monoproblema

$$\int_E f(x) dx$$

$$\int_E g(x) dx$$

Supponiamo che $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ in E . Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \quad (\text{CASI STANDARD})$$

è il p.to in cui c'è il problema: si intende che i due integrali hanno un solo problema e ce l'hanno nello stesso punto x_0 , che può essere un estremo di integrazione o $\pm\infty$.

Allora i due integrali hanno lo stesso comportamento, cioè il 1° converge se e solo se converge il 2°.

CASI LIMITE. Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

[Allora $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$ vicino ad x_0 , quindi $f(x) < g(x)$ vicino a x_0 , quindi]

$$\int_E g(x) dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx < +\infty ; \quad \int_E g(x) dx = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

Supponiamo invece che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

[Allora $\frac{f(x)}{g(x)} > 1$ vicino ad x_0 , quindi $f(x) > g(x)$ vicino ad x_0 , quindi]

$$\int_E g(x) dx < +\infty \Rightarrow \text{BOH}, \quad \int_E g(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx = +\infty.$$

Absoluta integrabilità

$$\int_E |f(x)| dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx \text{ converge}$$

$$\int_E |f(x)| dx = +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx \text{ BOH}$$

Esempio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$ Ci sono 2 problemi: a 0 e a $+\infty$

$\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$. Considero $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$. L'integrandola è > 0

$f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ a $+\infty$, quindi $\int f(x) dx$ con problema a $+\infty$ si comporta

come $\int \frac{1}{x^2} dx$ con problema a $+\infty$, quindi converge.

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Devo fare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} \cdot x^2 = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

$\Rightarrow$ i 2 integrali con problema a $+\infty$ hanno lo stesso comportamento.

Considero ora $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$. Ancora una volta $f(x) > 0$.

$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, quindi si comporta come $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ con problema in 0. Questo converge perché $\frac{1}{2} < 1$.

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Devo fare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\sqrt{x} + 1} = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx$ Ancora una volta $f(x) \geq 0$ e ho 2 problemi

Problema a $+\infty$ $\frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{142}{x\sqrt{x}}$ potrei mettere anche $\frac{\pi}{2}$

$\int \frac{142}{x\sqrt{x}} dx = 142 \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ con problema a $+\infty$ converge, in quanto ha esponente $\frac{3}{2} > 1$.

Quindi anche $\int \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx$, con problema a $+\infty$, converge.

Problema a 0 Non posso usare il confronto di prima, in quanto

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \text{ con problema in } 0 \text{ diverge, quindi BOH.}$$

Ora $f(x) \sim \frac{x}{x\sqrt{x}}$ vicino a 0, quindi $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, quindi
 $\uparrow$
 $\arctan x \sim x$ l'integrale con problema in 0 converge.

Formalmente faccio confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \cdot \cancel{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

$\Rightarrow$ i due integrali hanno lo stesso comportamento, quindi convergono.

Nota bene:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx}_{+\infty} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx}_{\text{conv.}} = +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx}_{\text{conv.}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx}_{+\infty} = +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx}_{\text{conv.}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx}_{\text{conv.}} \quad \text{conv.}$$

Esempio 3

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$$

Nota bene: l'integranda è > 0 , in quanto $\sin x > 0$ in $(0, 1]$,
anzi $\sin x > 0$ in $(0, \pi)$

Ora per gli sviluppi $\frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$ per $x \sim 0$, quindi

$\int \frac{1}{\sin x} dx$ con problema unico in 0 si comporta come $\int \frac{1}{x} dx$
" " " " " , quindi DIVERGE.