

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 084

Titolo nota

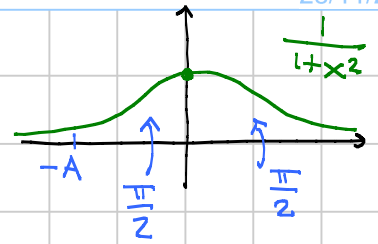
28/11/2012

Esempio 1 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \quad (\text{fatto prima})$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan x]_{-A}^0 \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan 0 - \arctan(-A)] = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$\downarrow -\frac{\pi}{2}$



Quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

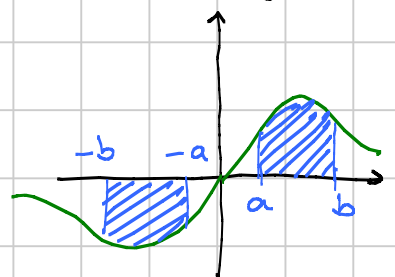
Oss. Come sempre, se l'integranda $f(x)$ è positiva nella zona di integrazione, l'integrale (anche se improprio) non può venire negativo o divergere a $-\infty$.

Oss. Sfruttare le simmetrie risparmia dei calcoli. Cioè

- Se $f(x)$ è pari, allora $\int_a^b f(x) dx$ è come fare $\int_{-b}^{-a} f(x) dx$
- Se $f(x)$ è dispari, allora $\int_a^b f(x) dx$ è come fare $\int_{-b}^{-a} f(x) dx$ cambiato di segno.

In particolare, se $f(x)$ è dispari e limitata, allora

$$\int_{-A}^A f(x) dx = 0$$



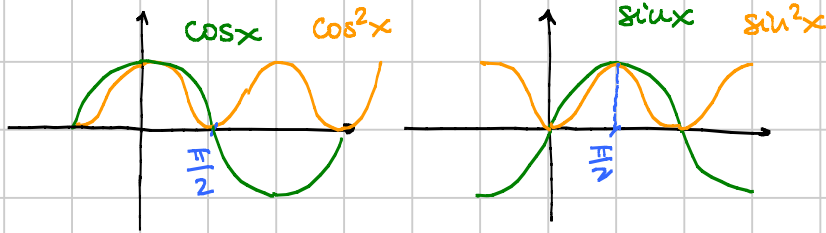
Se $f(x)$ è pari e limitata, allora

$$\int_{-A}^A f(x) dx = 2 \int_0^A f(x) dx, \quad \text{cioè} \quad \int_{-A}^0 f(x) dx = \int_0^A f(x) dx$$

Altro esempio sulle simmetrie

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$$

Potei farlo con la primitiva



I grafici di $\cos^2 x$ e $\sin^2 x$ hanno notevoli simmetrie, esattamente come quelli di $\cos x$ e $\sin x$. Quindi se pongo

$$C = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \quad S = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx \quad \text{ho che } C = S$$

$$\text{D'altra parte } C + S = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Pertanto } C = S = \frac{\pi}{4}.$$

Da ricordare: $\int_a^b 1 \, dx = (b-a) = \text{lunghezza intervallo}$
 $= (\text{area di un rettangolo di altezza } 1)$

$$\int_0^{k\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_0^{k\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \frac{k\pi}{4} \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}$$

(sono uguali e la loro somma è l'integrale di 1 tra 0 e $k\frac{\pi}{2}$).

Formalmente si dimostra tutto con un cambio di variabili:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \quad \text{Pongo } y = \frac{\pi}{2} - x. \quad \text{Quando } x=0 \text{ ho che } y = \frac{\pi}{2}$$
$$\text{Quando } x = \frac{\pi}{2} \text{ ho che } y = 0$$
$$\text{Infine } dy = -dx$$

$$= \int_{\pi/2}^0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - y\right) (-dy) = - \int_{\pi/2}^0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - y\right) dy = \int_0^{\pi/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - y\right) dy$$
$$\quad \quad \quad (\cos(\frac{\pi}{2} - y) = \sin y) \quad = \int_0^{\pi/2} \sin^2 y \, dy$$

— 0 — 0 —

Torniamo agli integrali impropri. Sia $a > 0$.

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\log x]_a^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} (\log A - \log a) = +\infty$$

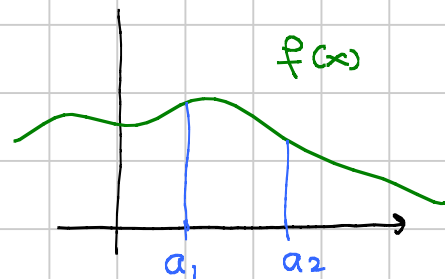
$\downarrow +\infty$

$$\int_0^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\log a - \log \varepsilon) = +\infty$$

$\downarrow -\infty$

Osservazione Se ho $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ con $a > 0$, il comportamento non dipende dal valore di a se $f(x)$ è limitata

$$\int_{a_1}^{+\infty} f(x) dx = \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} f(x) dx}_{\text{Numero}} + \int_{a_2}^{+\infty} f(x) dx$$



I due integrali impropri differiscono per un numero, quindi hanno lo stesso comportamento (se convergono, possono convergere a valori diversi).

Esempio 1 $(a > 0)$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{1}{x^\alpha} dx \stackrel{\alpha \neq 1}{=} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_a^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{a^{\alpha-1}} \right)$$

Ci sono 2 casi:

→ se $\alpha-1 > 0$, cioè se $\alpha > 1$, si ha che $\frac{1}{A^{\alpha-1}} \rightarrow 0$, quindi l'integrale converge a $\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{a^{\alpha-1}}$

→ se $\alpha-1 < 0$, cioè se $\alpha < 1$, si ha che $\frac{1}{A^{\alpha-1}} \rightarrow +\infty$, quindi (visto che il coefficiente $\frac{1}{-\alpha+1} > 0$, tutto l'integrale diverge a $+\infty$).

Tenendo conto del caso $\alpha = 1$ fatto precedentemente, abbiamo che

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\nearrow$ converge se $\alpha > 1$
 $\searrow$ diverge a $+\infty$ se $\alpha \leq 1$

PROBLEMA

A $+\infty$

Esempio 2 dato $a > 0$, $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^a \frac{1}{x^\alpha} dx$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_\varepsilon^a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right)$$

Ci sono 2 casi

$\rightarrow$ Se $\alpha-1 < 0$, cioè se $\alpha < 1$, allora $\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \rightarrow 0$, quindi l'integrale converge

$\rightarrow$ Se $\alpha-1 > 0$, cioè se $\alpha > 1$, allora $\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \rightarrow +\infty$, quindi (tenendo conto del segno del coeff.) si ha che l'integrale diverge a $+\infty$.

Tenendo conto del caso $\alpha=1$ fatto all'inizio, abbiamo che

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\nearrow$ converge per $\alpha < 1$
 $\searrow$ diverge a $+\infty$ per $\alpha \geq 1$

PROBLEMA
IN 0

Oss. La situazione è "invertita" rispetto al problema a $+\infty$.

Questo non stupisce se si pensa ai grafici

