

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 083

Titolo nota

28/11/2012

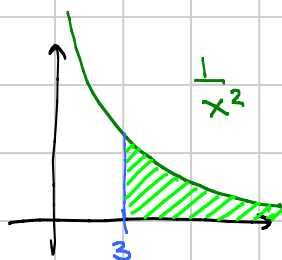
INTEGRALI IMPROPRI Due ingredienti fondamentali per integrali propri:

- zona di integrazione limitata (intervallo $[a, b]$),
- funzione integranda limitata.

Un integrale si dice improprio se manca almeno uno dei 2 ingredienti.

Esempi

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$



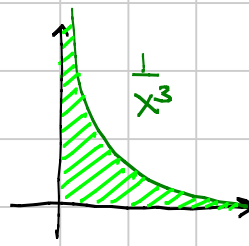
integranda limitata
zona di int. no

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$



integranda non lim.
zona di int. limitata

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$$



integranda non lim.
zona di int. non lim.

Achtung! Nel secondo esempio quello che rende l'integrale improprio è che $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tende a $+\infty$ per $x \rightarrow 0^+$, quindi non è limitata, non il fatto che non è definita per $x=0$.

INTEGRALI IMPROPRI MONOPROBLEMA "Con un problema solo"

Sono di 2 tipi

1° tipo Zona di integrazione = semiretta $[a, +\infty)$ oppure $(-\infty, a]$
funzione integranda limitata

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx$$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

2° tipo

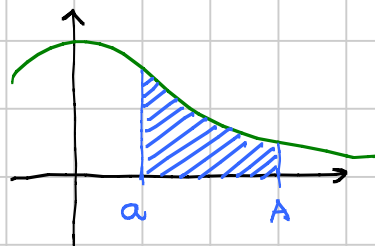
Zona di integrazione = intervallo $[a, b]$

funzione integranda non limitata, ma solo nell'intorno di uno dei due estremi di integrazione.

Definizione Nel caso del 1° tipo si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

Questo è un integrale proprio perché f è limitata

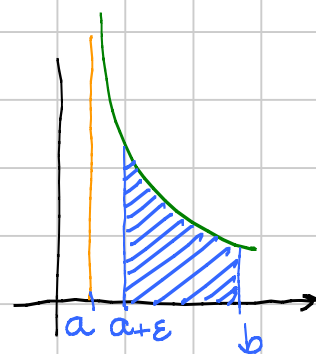


Analogamente $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx$

Nel caso del 2° tipo, se il problema è in a si pone

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Questo è un integrale proprio perché appena mi stacco da a la $f(x)$ è limitata.



Analogamente, se il problema è in b , si pone

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

ossia: se voglio che $b-\varepsilon < b$ deve essere $\varepsilon > 0$, quindi $\varepsilon \rightarrow 0^+$.



Oss. Essendo definito come limite, un integrale improprio ha 4 possibili comportamenti

→ convergere (il limite è $l \in \mathbb{R}$),

→ divergere a $+\infty$,

→ " " $-\infty$

→ essere indeterminato

— 0 — 0 —

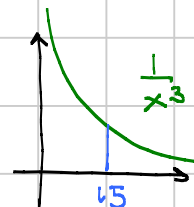
E se c'è più di un problema? Si procede così:

- ① Si spezza in tanti integrali con un problema solo
- ② Si studiano i singoli pezzi
- ③ Si deduce il comportamento complessivo sulla base del comportamento dei singoli pezzi, con la convenzione che se un pezzo diverge a $+\infty$ ed un pezzo diverge a $-\infty$, allora tutto quanto è indeterminato.

Esempi di spezzamento

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \quad \text{Questo ha 2 problemi}$$

(a 0 e a $+\infty$)

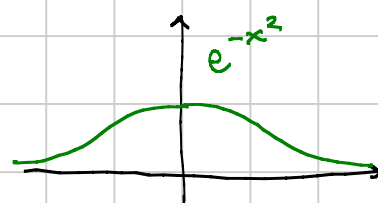


$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \int_0^{15} \frac{1}{x^3} dx + \int_{15}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$$

(Posso usare un qualunque $a > 0$ invece di 15)

entrambi sono MONOPROBLEMA

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

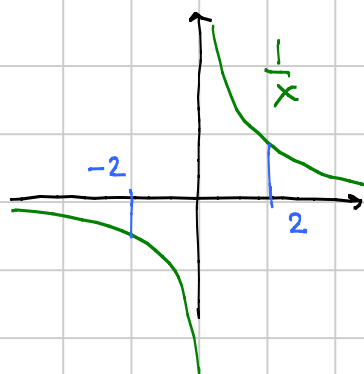


oppure

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{-3} e^{-x^2} dx + \int_{-3}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{x} dx \quad \text{In un certo senso ha solo}$$

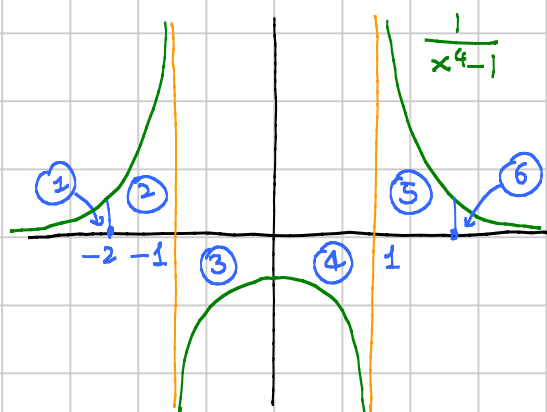
il problema in $x=0$, che non è un estremo, quindi va spezzato



$$\int_{-2}^2 \frac{1}{x} dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^2 \frac{1}{x} dx$$

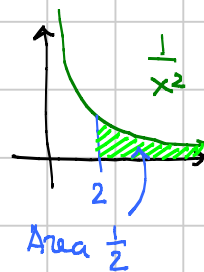
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 - 1} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-2} + \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^0 + \int_0^1 + \int_1^5 + \int_5^{+\infty}$$



Esempio 1 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_2^A$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1}{A} + \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$$



Esempio 2 $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-2x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^A$

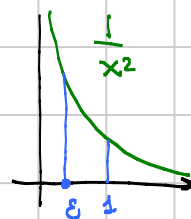
$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2A} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}$$

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan x]_0^A$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \{ \arctan A - \arctan 0 \} = \frac{\pi}{2}$$

Esempio 4 $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ -1 + \frac{1}{\varepsilon} \right\} = +\infty$$



Esempio 5 $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^5$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \{ 2\sqrt{5} - 2\sqrt{\varepsilon} \} = 2\sqrt{5}$$