

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 082

Titolo nota

24/11/2012

Esempio 1 $\int \sqrt{5-4x-4x^2} dx$

$$4x^2+4x-5=0 \quad \Delta > 0$$

$\Rightarrow$ ci sono 2 radici

$\Rightarrow$ uno dei 2 metodi funziona

$$= \int \sqrt{6-1-4x-4x^2} dx$$

$$= \int \sqrt{6-(2x+1)^2} dx$$

Pongo $y = 2x+1$ da cui $dy = 2dx$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{6-(2x+1)^2} \cdot 2dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{6-y^2} dy$$

Pongo $y = \sqrt{6} \cos z$

da cui $dy = \sqrt{6} (-\sin z) dz$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{6-6\cos^2 z} \sqrt{6} (-\sin z) dz$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{6} \int \sqrt{1-\cos^2 z} \cdot \sin z dz = -3 \int \sin^2 z dz \text{ e da qui è come prima.}$$

Osservazione Ogni polinomio di 2° grado ax^2+bx+c si può scrivere come

$$(x+\beta)^2 + \gamma \quad \text{se } a > 0$$

$$-(x+\beta)^2 + \gamma \quad \text{se } a < 0$$

Esempio 2 $\int \sqrt{x^2+1} dx$

Di sicuro funziona $y+x = \sqrt{x^2+1}$

Ricordo la relazione fondamentale $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$

quindi $\cos^2 x = 1 + \sin^2 x$

Pongo nell'integrale $x = \sin y$ da cui $dx = \cos y dy$

$$\int \sqrt{x^2+1} dx = \int \sqrt{\sin^2 y + 1} \cdot \cos y dy = \int \cos^2 y dy$$

Per integrare $\cos^2 y$ vedo
3 possibilità

$\rightarrow$ espandere $\cos y$ con la definizione

$\rightarrow$ formula di duplicazione $\cos(2y) \dots$

$\rightarrow$ parti + grande ritorno

$$\begin{aligned}
 \int \cos^2 y \, dy &= \int \underset{F}{\cos y} \cdot \underset{g}{\cos y} \, dy = \underset{F}{\cos y} \cdot \underset{G}{\sin y} - \int \underset{f}{\sin^2 y} \, dy \quad \underset{G}{} \\
 &= \cos y \cdot \sin y - \int (\cos^2 y - 1) \, dy \\
 &= \cos y \cdot \sin y + y - \int \cos^2 y \, dy
 \end{aligned}$$

grande ritorno

Quindi:

$$\int \cos^2 y \, dy = \frac{1}{2} \boxed{\cos y} \cdot \boxed{\sin y} + \frac{1}{2} \boxed{y}$$

$\downarrow$
 x

$\downarrow$
 $\text{setto } \sin x$

Ora devo tornare in x

$$\sqrt{1 + \sin^2 y} = \sqrt{1 + x^2}$$

In definitiva

$$\int \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \boxed{\text{setto } \sin x}$$

$\downarrow$ volendo per questo c'è una formula in termini di $\log$ e $\sqrt{1+x^2}$...

— o — o —

Formule parametriche per $\sin x$ e $\cos x$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad t = \tan \frac{x}{2}$$

Esempio 3 $\int \frac{3 + \sin x}{5 + \cos x} \, dx$

Pongo $y = \tan \frac{x}{2}$; $dy = (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) \frac{1}{2} dx$

$$= \int \frac{3 + \frac{2y}{1+y^2}}{5 + \frac{1-y^2}{1+y^2}} \cdot \frac{2dy}{1+y^2}$$

$dy = (1+y^2) \frac{1}{2} dx$, quindi
 $dx = \frac{2dy}{1+y^2}$

Resta solo una funzione razionale.

Esempio 4 $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \int \frac{\cancel{1+y^2}}{2y} \cdot \frac{2\cancel{dy}}{\cancel{1+y^2}} = \int \frac{dy}{y} = \log |y|$

$$= \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

1° metodo alternativo: moltiplico sopra e sotto per $\sin x$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

Pongo $y = \cos x$, quindi $dy = -\sin x dx$

$$= - \int \frac{-\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = - \int \frac{dy}{1 - y^2} = \int \frac{dy}{y^2 - 1}$$

$$\frac{1}{y^2 - 1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{y+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{y-1},$$

$$= -\frac{1}{2} \log|y+1| + \frac{1}{2} \log|y-1|$$

$$= -\frac{1}{2} \log|\cos x + 1| + \frac{1}{2} \log|\cos x - 1|$$

Oss. lo stesso metodo funziona per tutte le potenze DISPARI negative di $\sin x$ e $\cos x$.

Esempio 5 $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$

1° modo: formule parametriche

2° modo: moltiplico sopra e sotto per $\cos x$:

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\cos x}{(1 - \sin^2 x)^2} dx$$

Pongo $y = \sin x$ da cui $dy = \cos x dx$

$$= \int \frac{dy}{(1 - y^2)^2} \text{ che è razionale ...}$$

$$\frac{1}{(1 - y^2)^2} = \frac{1}{(1 - y)^2 (1 + y)^2}$$

$$= \frac{A}{1 - y} + \frac{B}{1 + y} + \frac{C}{dy} \frac{Cy + D}{1 - y^2}$$

— 0 — 0 —

Esempio 6 $\int_0^{10} \sqrt{|5x - 2|} dx$

Bisogna spezzare

$$|5x - 2| = \begin{cases} 5x - 2 & \text{per } x \geq \frac{2}{5} \\ 2 - 5x & \text{per } x \leq \frac{2}{5} \end{cases}$$

Quindi

$$\int_0^{10} \sqrt{5x-2} dx = \int_0^{\frac{2}{5}} \sqrt{2-5x} dx + \int_{\frac{2}{5}}^{10} \sqrt{5x-2} dx$$

$\int \sqrt{5x-2} dx$ Pongo $y = 5x-2$ da cui $dy = 5dx$, $dx = \frac{1}{5} dy$

$$= \int \sqrt{y} \frac{1}{5} dy = \frac{1}{5} \int \sqrt{y} dy = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} y^{3/2} = \frac{2}{15} (5x-2)^{\frac{3}{2}}$$

Achtung! Quando uso la sostituzione per calcolare un integrale con gli estremi, bisogna

→ o tornare in x prima di sostituire gli estremi

→ o cambiare anche gli estremi

facile la primitiva

$$\int_{\frac{2}{5}}^{10} \sqrt{5x-2} dx \stackrel{?}{=} \left[\frac{2}{15} (5x-2)^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{2}{5}}^{10}$$

OK

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2}{5}}^{10} \sqrt{5x-2} dx &= \frac{1}{5} \int_{??}^{??} \sqrt{y} dy \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{48} \sqrt{y} dy \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \left[y^{\frac{3}{2}} \right]_0^{48} \end{aligned}$$

Quando $x = \frac{2}{5}$ ho $y = 5x-2 = 0$

Quando $x = 10$ ho $y = 48$

OK

$$\int_{\frac{2}{5}}^{10} \sqrt{5x-2} dx = \dots = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \left[y^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{2}{5}}^{10}$$

NO Occorre cambiare gli estremi !!!