

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 081

Titolo nota

24/11/2012

Integrale con termini del tipo $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Esempio 1 $\int \sqrt{x^2+3x+5} dx$ Pongo $y+x = \sqrt{x^2+3x+5}$ che è come dire
 $y = \sqrt{x^2+3x+5} - x$

Cerco di ricavare x in funzione di y

$$y^2 + 2xy + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 3x + 5$$

Essendo di 1° grado in x , risolvo senza $\sqrt{}$

$$x(2y-3) = 5-y^2 \quad x = \frac{5-y^2}{2y-3}$$

$$\text{da cui } dx = \left[\frac{5-y^2}{2y-3} \right]' dy$$

$$= \int (y+x) dx$$

$$= \int \left(y + \frac{5-y^2}{2y-3} \right) \left[\frac{5-y^2}{2y-3} \right]' dy$$

$\uparrow$
 x ricavato

Almeno è razionale

$$= \int \frac{\cancel{2y^2} - 3y + 5 - \cancel{y^2}}{2y-3} \cdot \left[\frac{5-y^2}{2y-3} \right]' dy = \text{con "qualche" conto si chiude.}$$

F

Esempio 2 $\int \sqrt{3x^2+5} dx$

Pongo $y + \sqrt{3}x = \sqrt{3x^2+5}$

Facendo i quadrati

$$y^2 + 2\sqrt{3}xy + \cancel{3x^2} = \cancel{3x^2} + 5, \text{ quindi}$$

$$2\sqrt{3}xy = 5-y^2 \quad x = \frac{5-y^2}{2\sqrt{3}y}$$

$$\text{da cui } dx = \left[\frac{5-y^2}{2\sqrt{3}y} \right]' dy$$

$$= \int (y + \sqrt{3}x) dx = \int \left(y + \sqrt{3} \frac{5-y^2}{2\sqrt{3}y} \right) \left[\frac{5-y^2}{2\sqrt{3}y} \right]' dy =$$

$$= \int \frac{2y^2 + 5 - y^2}{2y} \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\frac{5}{y} - y \right]' dy = \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{y^2+5}{y} \left[-\frac{5}{y^2} - 1 \right] dy$$

$$= \frac{-1}{4\sqrt{3}} \int \left(y + \frac{5}{y} \right) \left(1 + \frac{5}{y^2} \right) dy = -\frac{1}{4\sqrt{3}} \int \left(y + \frac{10}{y} + \frac{25}{y^3} \right) dy =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} y^2 + 10 \log |y| - \frac{25}{2} \frac{1}{y^2} \right) \quad \text{Ora basta sostituire}$$

$$y = \sqrt{3x^2+5} - \sqrt{3}x$$

Regola generale: quando ho $\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$ posso porre

$$y + \sqrt{a}x = \sqrt{ax^2+bx+c} \quad \text{funziona se } a > 0$$

Esempio 3 $\int \sqrt{x^2-4x-5} dx$ Potrei fare $y+x = \sqrt{x^2-4x-5}$

Metodo alternativo: scomporre $x^2-4x-5 = (x-5)(x+1)$.

Scelgo a caso uno dei 2 fattori: $x-5$

Pongo $y(x-5) = \sqrt{x^2-4x-5} = \sqrt{(x-5)(x+1)}$

Facendo i quadrati trovo

$$y^2(x-5)^2 = (x-5)(x+1) \quad \text{che è di 1° grado in } x$$

$$xy^2 - 5y^2 = x+1, \quad x(y^2-1) = 1+5y^2$$

$$x = \frac{1+5y^2}{y^2-1} \quad \text{da cui} \quad dx = \left[\frac{1+5y^2}{y^2-1} \right]' dy$$

$$= \int y(x-5) dx = \int y \left(\frac{1+5y^2}{y^2-1} - 5 \right) \cdot \left[\frac{1+5y^2}{y^2-1} \right]' dy$$

e da qui in poi sono conti con funzioni razionali.

Esempio 4 $\int \sqrt{4-x^2} dx$ Qui il metodo con $\sqrt{a}$ non funziona...

$4-x^2 = (2+x)(2-x)$ Pongo $y(2+x) = \sqrt{(2+x)(2-x)}$

$$y^2(2+x)^2 = (2+x)(2-x)$$

$$2y^2 + xy^2 = 2-x$$

$$x(y^2+1) = 2-2y^2$$

$$x = \frac{2-2y^2}{y^2+1}$$

$$dx = \left[\frac{2-2y^2}{y^2+1} \right]' dy$$

$$= \int y(2+x) dx = \int y \left(2 + \frac{2-2y^2}{y^2+1} \right) \left[\frac{2-2y^2}{y^2+1} \right]' dy$$

$$= \int y \left(\frac{2y^2 + 2 + 2 - 2y^2}{y^2 + 1} \right)^2 \left[\frac{1 - y^2}{y^2 + 1} \right]' dy = 8 \int \frac{y}{y^2 + 1} \frac{-2y(y^2 + 1) - 2y(1 - y^2)}{(y^2 + 1)^2} dy$$

$$= 8 \int \frac{y}{y^2 + 1} \frac{-2y^3 - 2y - 2y + 2y^3}{(y^2 + 1)^2} dy = -32 \int \frac{y^2}{(y^2 + 1)^3} dy$$

$$\frac{y^2}{(y^2 + 1)^3} = \frac{Ay + B}{y^2 + 1} + \frac{d}{dy} \frac{Cy^3 + Dy^2 + Ey + F}{(y^2 + 1)^2} \quad \text{e con "qualche" calcolo si chiude}$$

Punto della situazione: $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

	$y + \sqrt{a}x = \sqrt{\dots}$	$y(x - \text{radice}) = \sqrt{\dots}$
$a > 0$	OK	OK
$\Delta \geq 0$	OK	OK

- ① Se $a > 0$ e $\Delta \geq 0$ ho 2 strumenti buoni
- ② Se $a > 0$ e $\Delta < 0$ funziona $y + \sqrt{a}x$
- ③ Se $a < 0$ e $\Delta \geq 0$ funziona $y(x - \text{radice})$
- ④ Se $a < 0$ e $\Delta < 0$ si ha che $ax^2 + bx + c < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ non ha mai senso.

Esempio 5 $\int \sqrt{4 - x^2} dx$ Pongo $x = 2 \sin y$, da cui $dx = 2 \cos y dy$

$$= \int \sqrt{4 - 4 \sin^2 y} \cdot 2 \cos y dy = 4 \int \sqrt{1 - \sin^2 y} \cdot \cos y dy$$

$$= 4 \int \cos^2 y dy = 4 \int \frac{\cos(2y) + 1}{2} dy \quad \cos(2y) = 2\cos^2 y - 1$$

$$= 2 \int (\cos(2y) + 1) dy = \sin(2y) + 2y \quad \text{Ora voglio tornare in } x$$

$$= 2 \sin y \cos y + 2y$$

$$y = \arcsin \frac{x}{2} \quad = \boxed{2 \sin y} \sqrt{1 - \sin^2 y} + 2y$$

$$= x \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + 2 \arcsin \frac{x}{2}$$

Passaggi delicati: $\rightarrow$ tutte le volte che abbiamo usato $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$
perché ci potrebbero essere problemi di segno.
 $\rightarrow$ considerare arcsin $\times$ allegramente

Rimedio: fare la verifica della primitiva ottenuta.