

SOSTITUZIONI RAZIONALIZZANTI→ Funzioni razionali di e^x → Radici n -esime di roba di 1° grado

→ Radici quadrate di roba di 2° grado

→ Sostituzioni trigonometriche

Esempio 1 $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$

Pongo $y = e^x$, quindi $\frac{dy}{dx} = e^x$, da cui $dy = e^x dx$

$$= \int \frac{e^x}{1+e^x} \cdot \boxed{e^x dx}_{dy} = \int \frac{y}{1+y} dy$$

$$= \int \frac{y+1-1}{1+y} dy = \int \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) dy$$

$$= y - \log|1+y| = e^x - \log(1+e^x)$$

Non metto il valore assoluto perché $1+e^x > 0$ sempreAlternativa: pongo $y = 1+e^x$, quindi $\frac{dy}{dx} = e^x$, da cui $dy = e^x dx$

$$\int \frac{\boxed{e^x}_{y-1}}{\boxed{1+e^x}_y} e^x dx = \int \frac{y-1}{y} dy = \int \left(1 - \frac{1}{y}\right) dy = y - \log|y|$$

$$= \textcircled{1} + e^x - \log(1+e^x)$$

è una costante, ma in fondo è la "stessa primitiva" di prima

Esempio 2 $\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx$

Pongo $y = e^x$, quindi come prima $dy = e^x dx$

$$= \int \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot \boxed{\frac{e^x dx}{e^x}}_{dy} = \int \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{1}{y} dy$$

$$\frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{1+y^2} = \frac{A + Ay^2 + By^2 + Cy}{y(1+y^2)}$$

$$A+B=0 \quad (\text{coeff. } x^2)$$

$$C=0 \quad (\text{coeff. } x)$$

$$A=1 \quad (\text{term. noto})$$

 $A=1, B=-1, C=0$, quindi

$$\frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2} \quad \text{da cui} \quad \int \frac{dy}{y(1+y^2)} = \log|y| - \frac{1}{2} \log(1+y^2)$$

Tomando in x :

$$\int \frac{dx}{1+e^{2x}} = \log|e^x| - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x}) = x - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x})$$

Alternativa: Pongo $y = 1+e^{2x}$, quindi $\frac{dy}{dx} = 2e^{2x}$, da cui $dy = 2e^{2x} dx$

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{1}{\underbrace{2e^{2x}}_{y-1}} \cdot \frac{1}{\underbrace{1+e^{2x}}_y} \cdot \underbrace{2e^{2x} dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y(y-1)} dy$$

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} = \frac{Ay - A + By}{y(y-1)} \quad \begin{array}{ll} A+B=0 & B=1 \\ -A=1 & A=-1 \end{array}$$

$$\frac{1}{y(y-1)} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} \quad \text{da cui} \quad \int \frac{1}{y(y-1)} dy = -\log|y| + \log|y-1|$$

Tomando nella variabile x , abbiamo

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+e^{2x}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{y(y-1)} dy = -\frac{1}{2} \log|y| + \frac{1}{2} \log|y-1| \\ &= -\frac{1}{2} \log(1+e^{2x}) + \frac{1}{2} \log e^{2x} \\ &= -\frac{1}{2} \log(1+e^{2x}) + x \end{aligned}$$

Osservazione Si fanno allo stesso modo tutti gli integrali con funzioni razionali di e^x .

Esempio 3 $\int \frac{8^x}{3+4^x} dx$ Pongo $y = 2^x$, quindi $dy = 2^x \log 2 \cdot dx$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{2^{2x}}{3+2^{2x}} \cdot \frac{2^x dx \cdot \log 2}{\log 2} dy = \frac{1}{\log 2} \int \frac{y^2}{3+y^2} dy = \frac{1}{\log 2} \int \frac{y^2+3-3}{3+y^2} dy \\ &= \frac{1}{\log 2} \int \left(1 - \frac{3}{3+y^2}\right) dy = \frac{1}{\log 2} \left\{ y - 3 \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{y}{\sqrt{3}} \right\} = \\ &= \frac{1}{\log 2} \left\{ 2^x - \sqrt{3} \arctan \frac{2^x}{\sqrt{3}} \right\} \quad \text{VERIFICA !!} \end{aligned}$$

Esempio 4 $\int \frac{5+\sqrt{x}}{x+2} dx$ Pongo $y = \sqrt{x}$, da cui $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
quindi $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$$= \int \frac{5+\sqrt{x}}{\underbrace{x+2}_{y^2+2}} \cdot 2\sqrt{x} \cdot \underbrace{\frac{dx}{2\sqrt{x}}}_{dy} = \int \frac{5+y}{y^2+2} \cdot 2y dy = 2 \int \frac{y^2+5y+2-2}{y^2+2} dy$$

$$= 2 \int \left(1 + \frac{5y-2}{y^2+2} \right) dy = 2 \int \left(1 + \frac{5y}{y^2+2} - \frac{2}{y^2+2} \right) dy =$$

$$= 2y + 2 \frac{5}{2} \log(y^2+2) - 4 \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{x} + 5 \log(\underbrace{x+2}_{\uparrow}) - 2\sqrt{2} \arctan \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$$

il resto della funzione ha
senso solo per $x \geq 0$, quindi
qui non serve il valore assoluto

Sostituzione reinterpretata:

Pongo $y = \sqrt{x}$, da cui $x = y^2$, da cui

$\frac{dx}{dy} =$ derivata di x rispetto a $y = 2y$, quindi $dx = 2y dy$

$$\int \frac{5+\sqrt{x}}{x+2} \underbrace{dx}_{2y dy} = \int \frac{5+y}{y^2+2} \cdot \underbrace{2y dy}_{2y dy} \text{ e arrivo allo stesso punto di prima}$$

Esempio 5 $\int \frac{5+x}{\sqrt[3]{x+3}+2} dx$ Pongo $y = \sqrt[3]{x+3}$, da cui $y^3 = x+3$, cioè
 $x = y^3 - 3$. Allora $\frac{dx}{dy} = 3y^2$, cioè
 $dx = 3y^2 dy$

$$= \int \frac{5+y^3-3}{y+2} 3y^2 dy = 3 \int \frac{y^3+2y^2}{y+2} dy$$

e da qui si conclude con la divisione di polinomi.

Esempio 6 $\int \frac{5+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+2} dx$ Pongo $y = \sqrt[6]{x}$, da cui $x = y^6$ e $dx = 6y^5 dy$

$$= \int \frac{5+y^3}{y^2+2} \cdot 6y^5 dy = 6 \int \frac{y^8+5y^5}{y^2+2} dy \text{ e si conclude con la divisione.}$$

Regola generale: se l'integrale contiene termini del tipo $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, ..., $\sqrt[n]{x}$ conviene fare la sostituzione $y = \sqrt[n]{x}$, con $n =$ minimo comune multiplo di tutti gli ordini di radice presenti.

Esempio 7 $\int \sqrt{\frac{x+3}{x+2}} dx$ Pongo $y = \sqrt{\frac{x+3}{x+2}}$, da cui $y^2 = \frac{x+3}{x+2}$

... ricavo x ... $xy^2 + 2y^2 = x+3$

$x(y^2 - 1) = 3 - 2y^2$, quindi $x = \frac{3 - 2y^2}{y^2 - 1}$

da cui $dx = \left[\frac{3 - 2y^2}{y^2 - 1} \right]' dy$

$$= \int \underset{F}{y} \left[\underset{g}{\frac{3 - 2y^2}{y^2 - 1}} \right]' dy = \underset{F}{y} \underset{G}{\frac{3 - 2y^2}{y^2 - 1}} - \int \underset{F}{1} \cdot \underset{G}{\frac{3 - 2y^2}{y^2 - 1}} dy$$

e da qui si divide con le funzioni razionali.

La cosa funziona per integrali con

$$\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$