

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 079

Titolo nota

23/11/2012

Al termine della fase 3 restano da integrare 3 tipi di termini

① termini del tipo $\frac{A}{x-a} \rightsquigarrow A \log |x-a|$

② termini del tipo $\frac{d}{dx}$ (Roba) $\rightsquigarrow$ Roba

③ termini del tipo $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ (volendo con $a=1$)

con il denominatore che ha $\Delta < 0$, cioè non scomponibile.

Esempio 1 $\int \frac{3x+5}{x^2+2} dx = 3 \int \frac{x}{x^2+2} dx + 5 \int \frac{1}{2+x^2} dx$
 $= \frac{3}{2} \log(x^2+2) + 5 \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}}$

$$\int \frac{1}{a+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}$$

Allo stesso modo $\int \frac{Ax+B}{x^2+c} dx = A \int \frac{x}{x^2+c} dx + B \int \frac{1}{c+x^2} dx$
 $= \frac{A}{2} \log(x^2+c) + \frac{B}{\sqrt{c}} \arctan \frac{x}{\sqrt{c}}$

Achtung! Se fosse $c < 0$, il denominatore si potrebbe scomporre, quindi si potrebbe fare la fase 3.

Esempio 2 $\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{1+(x+1)^2} dx = \arctan(x+1)$

Esempio 3 $\int \frac{2x+5}{x^2+2x+2} dx$ L'idea: sistemare un pezzo con il log ed il restante con $\arctan x$

$$= \int \frac{2x+2+3}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{3}{x^2+2x+2} dx$$

$$= \log(x^2+2x+2) + 3 \arctan(x+1)$$

Esempio 4 $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{5x+5-3}{x^2+2x+2} dx$

$$= \int \frac{5x+5}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{3}{x^2+2x+2} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{3}{x^2+2x+2} dx$$

$$= \frac{5}{2} \log(x^2+2x+2) - 3 \arctan(x+1)$$

↑ non metto il valore assoluto perché
l'argomento è sempre > 0 .

Esempio 5 $\int \frac{1}{x^2+2x+6} dx = \int \frac{1}{5+(x+1)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{5}}$

↑
Pongo $x+1=y$

Esempio 6 $\int \frac{3x+5}{x^2+4x+7} dx$

[Volei sopra $2x+4$, ma mi faccio
andare bene $3x+6 \dots$]

$$= \int \frac{3x+6}{x^2+4x+7} dx - \int \frac{1}{x^2+4x+7} dx$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+7} dx - \int \frac{1}{3+(x+2)^2} dx$$

$$= \frac{3}{2} \log(x^2+4x+7) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{3}}$$

[Esercizio: trovare la formula per il caso $\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$]
— o — o —

Esempio 7 $\int \frac{1}{\cos x} dx$ Moltiplico sopra e sotto per $\cos x$

$$\int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx$$

Pongo $y = \sin x$, quindi $\frac{dy}{dx} = \cos x$
da cui $dy = \cos x \cdot dx$

$$= \int \frac{1}{1-y^2} \cos x dx$$

$$= \int \frac{1}{1-y^2} dy \quad \text{devo fare questo integrale razionale}$$

$$\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{(1+y)(1-y)} = \frac{-1}{(y+1)(y-1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1}$$

Moltiplico per $(y+1)$: $\frac{-1}{y-1} = A + B \frac{y+1}{y-1}$; $y = -1 \leadsto A = \frac{1}{2}$

Moltiplico per $(y-1)$: $\frac{-1}{y+1} = A \frac{y-1}{y+1} + B$; $y = 1 \leadsto B = -\frac{1}{2}$

Quindi $\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{y+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{y-1}$ da cui

$$\int \frac{1}{1-y^2} dy = \frac{1}{2} \log|y+1| - \frac{1}{2} \log|y-1| = \frac{1}{2} \log \left| \frac{y+1}{y-1} \right|$$

Tornando all'inizio

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right|$$

$\uparrow$
 $y = \sin x$

Esempio 8 $\int \arcsin x dx = \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\arcsin x} dx$

$$= \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\arcsin x} - \int \underset{G}{x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} dx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Pongo $y = 1-x^2$, da cui $\frac{dy}{dx} = -2x$, cioè $dy = -2x dx$

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-2x) dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \sqrt{y} = \sqrt{1-x^2}$$

In conclusione $\int \arcsin x dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

Esempio 9 $\int \frac{x}{x^4+1} dx \quad \int \frac{x^2}{x^4+1} dx \quad \int \frac{x^3}{x^4+1} dx$

$$\int \frac{x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \log(x^4+1)$$

Volevo veniva con la sostituzione $y = x^4+1$ oppure $y = x^4$

$$\int \frac{x}{x^4+1} dx \quad \text{Pongo } y = x^2 \text{ da cui } \frac{dy}{dx} = 2x, \text{ cioè } dy = 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^4+1} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^2+1} dy = \frac{1}{2} \arctan y = \frac{1}{2} \arctan(x^2)$$

Per il centrale bisogna fare

$$\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{x^2}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Sistema lineare ... e poi integrazione dei singoli pezzi...