

# ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 078

Titolo nota

23/11/2012

Fase 3 se il denominatore ha tutti i fattori di 1° e 2° grado con molteplicità uno.

$$Q(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denominatore}}}{(x-\alpha_1) \cdots (x-\alpha_k)} (a_1 x^2 + b_1 x + c_1) \cdots (a_m x^2 + b_m x + c_m)$$

Si punta a scrivere la frazione data in questo modo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_k}{x-\alpha_k} + \frac{B_1 x + C_1}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} + \cdots + \frac{B_m x + C_m}{a_m x^2 + b_m x + c_m}$$

Il grado di  $Q(x)$  è  $k+2m$

Il grado di  $P(x)$  è minore del grado di  $Q(x)$ , quindi  $\leq k+2m-1$ , quindi  $P(x)$  ha  $k+2m$  coefficienti (nota: un polinomio di grado  $n$  ha  $n+1$  coefficienti, perché c'è anche il termine noto).

Il sistema lineare ha

→  $k+2m$  incognite

→  $k+2m$  equazioni (una per ogni coeff. di  $P(x)$ )

Si può dimostrare che in questo caso il sistema ha sempre una soluzione unica.

Esempio

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^3+1} &= \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \\ &= \frac{A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C}{(x+1)(x^2-x+1)} \end{aligned}$$

|              |                 |              |                    |                       |
|--------------|-----------------|--------------|--------------------|-----------------------|
| $A+B = 0$    | (coeff. $x^2$ ) | $B = -A$     | $A = -\frac{1}{3}$ | $B = C = \frac{1}{3}$ |
| $-A+B+C = 1$ | (coeff. $x$ )   | $-A-A+A = 1$ |                    |                       |
| $A+C = 0$    | (termine noto)  | $C = -A$     |                    |                       |

Il sistema ha 3 equazioni anche se il numeratore ha grado 1.

Num equazioni = numero incognite = grado denominatore.

Il coeff. A si poteva calcolare con il metodo alternativo. Molt. per  $x+1$

$$\frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = A + \frac{(Bx+C)(x+1)}{x^2-x+1}$$

Pongo  $x = -1$  e ottengo  $\frac{-1}{3} = A$ , come sopra.

Per calcolare B e C con lo stesso metodo bisogna usare i complessi per avere dei valori che annullino il fattore  $x^2-x+1$ .

— o — o —

Come fare se al denominatore ci sono molteplicità.

Esempio

$$\frac{x}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{d}{dx} \frac{C}{x+1}$$

esattamente come prima

fattore con grado  
= grado (denom.) - 1

parte non ancora  
utilizzata del  
denominatore

$$\frac{7x^2+5}{(x^2+1)^2(x-2)^3(x+5)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+5} + \frac{d}{dx} \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{(x^2+1)(x-2)^2}$$

come se non ci fossero le  
molteplicità

Ho quindi 8 incognite e grado denominatore = 8, quindi avrò 8 equazioni corrispondenti ai coeff. dal termine noto fino a  $x^8$ .

Nell'esempio 1 avrei

$$\frac{x}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{d}{dx} \frac{C}{x+1}$$
$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} - \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{A(x+1)(x-2) + B(x+1)^2 - C(x-2)}{(x+1)^2(x-2)}$$

da qui tu poi si svolgono i conti.

Esempio  $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$

Divisione non necessaria. Fattorizzazione già fatta.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} &= \frac{Ax+B}{\boxed{x^2+1}} + \frac{d}{dx} \frac{Cx+D}{\boxed{x^2+1}} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C(x^2+1) - 2x(Cx+D)}{(x^2+1)^2} \\ &\quad \uparrow \text{fattore usato una volta} \quad \uparrow \text{parte non ancora utilizzata del denominatore.} \\ &= \frac{(Ax+B)(x^2+1) + C(x^2+1) - 2x(Cx+D)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{Ax^3 + Ax + \boxed{Bx^2} + B + \boxed{Cx^2} + C \boxed{-2Cx^2} - 2Dx}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$A = 0$  (coeff.  $x^3$ )

$A = 0$

$B - C = 1$  (coeff.  $x^2$ )

$2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

$A - 2D = 0$  (coeff.  $x$ )

$D = 0$

$B + C = 0$  (termine noto)

$C = -\frac{1}{2}$

Quindi 
$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} &= \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{x}{x^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{d}{dx} \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \boxed{\frac{x}{x^2+1}} \end{aligned}$$

↓ l'integrale della derivata è la funzione stessa.

Esempio  $\int \frac{x^5+1}{x^4+x^3} dx$

$$\begin{array}{r} x^5+1 \\ -x^5-x^4 \\ \hline -x^4+1 \\ -x^4-x^3 \\ \hline x^3+1 \\ -x^3-x^2 \\ \hline x^2+1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^4+x^3 \\ x-1 \end{array}$$

$$x^5 + 1 = (x^4 + x^3)(x-1) + (x^3 + 1)$$

$$\frac{x^5 + 1}{x^4 + x^3} = x - 1 + \frac{x^3 + 1}{x^4 + x^3} \quad \text{Fine divisione}$$

$$\frac{x^3 + 1}{x^4 + x^3} = \frac{x^3 + 1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{d}{dx} \frac{Cx + D}{x^2}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{d}{dx} \left( \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2} \right)$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} - \frac{C}{x^2} - \frac{2D}{x^3}$$

$$= \frac{Ax^2(x+1) + Bx^3 - Cx(x+1) - 2D(x+1)}{x^3(x+1)}$$

$$= \frac{Ax^3 + Ax^2 + Bx^3 - Cx^2 - Cx - 2Dx - 2D}{x^3(x+1)}$$

$$A + B = 1 \quad (x^3)$$

$$B = 1 - A = 0$$

$$A - C = 0 \quad (x^2)$$

$$A = C = 1$$

$$-C - 2D = 0 \quad (x)$$

$$C = -2D = 1$$

$$-2D = 1 \quad (\text{term. noto})$$

$$D = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x^3 + 1}{x^4 + x^3} = \frac{1}{x} + \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right)$$

Concludendo:

$$\frac{x^5 + 1}{x^4 + x^3} = x - 1 + \frac{1}{x} + \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right) \quad \text{da cui}$$

$$\int \frac{x^5 + 1}{x^4 + x^3} dx = \frac{1}{2} x^2 - x + \log|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3}$$

VERIFICA !!