

INTEGRAZIONE FUNZIONI RAZIONALI

$$\text{Funzione Razionale} = \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Algoritmo per determinare la primitiva di una funzione razionale:

- ① Divisione
- ② Fattorizzazione
- ③ Sistema Lineare
- ④ Integrazione finale

① Divisione Se $\text{grado}(P(x)) \geq \text{grado}(Q(x))$, divido $P(x)$ per $Q(x)$

$$P(x) = Q(x) \cdot A(x) + R(x)$$

↓ resto con $\text{grado}(R(x)) < \text{grado}(Q(x))$

Allora

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) \cdot A(x) + R(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

polinomio:
so fare la
primitiva

Nuova funzione razionale, ma
 $\text{grado}(\text{Num}) < \text{grado}(\text{Den.})$

Conclusione: basta saper fare le primitive delle funzioni razionali con $\text{grado}(\text{num.}) < \text{grado}(\text{den.})$

Esempi $\int \frac{x^3+3}{x^2+1} dx$

Quindi $x^3+3 = (x^2+1) \cdot x + (-x+3)$

$\begin{matrix} P(x) & Q(x) & A(x) & R(x) \end{matrix}$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & +3 \\ -x^3 - x & \\ \hline -x + 3 & \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2+1 \\ \hline x \\ \hline \end{array}$$

$A(x)$

$R(x)$

$$\frac{x^3+3}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)x + (-x+3)}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x^3+3}{x^2+1} dx = \int x dx - \int \frac{x dx}{x^2+1} + \int \frac{3}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + 3 \arctan x$$

2 Fattorizzazione Scompone il denominatore $Q(x)$

Fatto generale Ogni polinomio a coeff. reali si può scomporre come prodotto di fattori che hanno grado 1 o 2, eventualmente ripetuti.

I fattori di grado 1 corrispondono alle radici reali del polinomio (sono del tipo $x - \alpha$, con α radice).

I fattori di grado 2 hanno $\Delta < 0$, cioè non hanno ulteriori radici reali.

Def. La molteplicità di un fattore è il numero di volte che quel fattore compare nella scomposizione. La molteplicità di una radice α di un polinomio è il numero di volte in cui compare il fattore $x - \alpha$.

Esempi $x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$
 Si vede che ± 1 sono le radici reali del polinomio
 $x^3 - 1 = \underbrace{(x-1)}_{\substack{\text{radice reale} \\ x=1}} \underbrace{(x^2+x+1)}_{\substack{\Delta < 0, \text{ quindi non si scompone} \\ \text{ulteriormente su } \mathbb{R}}}$

$$Q(x) = (x^2+2)^{(3)} (x-1)^{(4)} (x+7)$$

Il fattore (x^2+2) ha molteplicità 3

Il fattore $x-1$ " " 4 (la radice $x=1$ ha mult. 4)

" " $x+7$ ha mult. 1 (la radice $x=-7$ ha mult. 1)

x^4+1 è sicuramente prodotto di 2 polinomi di grado 2 (di grado 1 non è possibile perché non ha radici reali)

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 \quad A^2-B^2$$

$$= (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x) \quad \begin{matrix} A+B & A-B \end{matrix}$$

3 Sistema lineare Scrivere la funzione razionale data come somma di funzioni razionali più semplici.

Caso semplice: se nella fattorizzazione di $Q(x)$ tutti i fattori di 1° e 2° grado hanno molteplicità 1.

In tal caso si può scrivere la funzione razionale come somma di frazioni che hanno come denominatore i singoli fattori di $Q(x)$ e numeratore

→ una costante, se il fattore è di 1° grado
→ un pol. di 1° grado se il fattore è di 2° grado

} grado num. =
grado denum. - 1

Esempio $\frac{2x+5}{x^2-1} = \frac{2x+5}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax - A + Bx + B}{(x+1)(x-1)}$

Cerco A e B in modo che le cose funzionino. Impongo

$$\begin{cases} A+B = 2 & \text{(coeff. di } x) \\ -A+B = 5 & \text{(termine noto)} \end{cases} \quad \begin{aligned} \text{Sommo! } 2B &= 7 \Rightarrow B = \frac{7}{2} \\ A &= 2 - B = 2 - \frac{7}{2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Quindi $\frac{2x+5}{x^2-1} = -\frac{3}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{7}{2} \frac{1}{x-1}$, per cui

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+5}{x^2-1} dx &= -\frac{3}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{7}{2} \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= -\frac{3}{2} \log|x+1| + \frac{7}{2} \log|x-1| = \log \sqrt{\frac{|x-1|^7}{|x+1|^3}} \end{aligned}$$

Modo alternativo di trovare A e B.

$$\frac{2x+5}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

Moltiplico tutto per $x+1$; $\frac{2x+5}{x-1} = A + \frac{B(x+1)}{x-1}$ Pongo $x = -1$
e ottengo $A = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$

Moltiplico tutto per $x-1$: $\frac{2x+5}{x+1} = \frac{A(x-1)}{x+1} + B$

Pongo $x = 1$ e ottengo $\frac{7}{2} = B$

Esempio 2

$$\frac{3x^3 + 5x - 2}{x^4 - 1} = \frac{3x^3 + 5x - 2}{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}$$

$$= \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{x - 1}$$

$$= \frac{(Ax + B)(x^2 - 1) + C(x^2 + 1)(x - 1) + D(x^2 + 1)(x + 1)}{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}$$

$$= \frac{\boxed{A}x^3 - \boxed{A}x + \boxed{B}x^2 - \boxed{B} + \boxed{C}x^3 - \boxed{C}x^2 + \boxed{C}x - \boxed{C} + \boxed{D}x^3 + \boxed{D}x^2 + \boxed{D}x + \boxed{D}}{---}$$

$$A + C + D = 3$$

(coeff. x^3)

$$1^a - 3^a: 2A = -2 \Rightarrow A = -1$$

$$B - C + D = 0$$

(coeff. x^2)

$$2^a - 4^a: 2B = 2 \Rightarrow B = 1$$

$$-A + C + D = 5$$

(coeff. x)

$$1^a: C + D = 4$$

$$-B - C + D = -2$$

(termine noto)

$$2^a: -C + D = -1$$

$$\text{Sommo } 2D = 3 \Rightarrow D = \frac{3}{2}$$

$$C = 4 - D$$

$$= 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Quindi fr. iniziale} = \frac{-x + 1}{x^2 + 1} + \frac{5}{2} \frac{1}{x + 1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x - 1}$$

quindi

$$\int \frac{3x^3 + 5x - 2}{x^4 - 1} dx = \int \frac{-x + 1}{x^2 + 1} dx + \frac{5}{2} \int \frac{1}{x + 1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x - 1} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + \arctan x + \frac{5}{2} \log|x + 1| + \frac{3}{2} \log|x - 1|$$

— 0 — 0 —