

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 076

Titolo nota

22/11/2012

$$\text{Esempio 1} \quad \int \underbrace{e^{2x}}_F \cdot \underbrace{\cos(3x)}_g dx = \underbrace{e^{2x}}_F \underbrace{\frac{1}{3} \sin(3x)}_G - \int \underbrace{2e^{2x}}_f \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \sin(3x)}_g dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin(3x) - \frac{2}{3} \int \underbrace{e^{2x}}_F \cdot \underbrace{\sin(3x)}_g dx$$

g F → provare a vedere che succede

$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin(3x) - \frac{2}{3} \left\{ \underbrace{e^{2x}}_F \underbrace{\left(-\frac{1}{3} \cos(3x)\right)}_G - \int \underbrace{2e^{2x}}_f \underbrace{\left(-\frac{1}{3} \cos(3x)\right)}_g dx \right\}$$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin(3x) + \frac{2}{9} e^{2x} \cdot \cos(3x) - \frac{4}{9} \int e^{2x} \cdot \cos(3x) dx$$

Grande ritorno!

Portando a sx ottengo

$$\frac{13}{9} \int e^{2x} \cdot \cos(3x) dx = \frac{1}{3} e^{2x} \cdot \sin(3x) + \frac{2}{9} e^{2x} \cdot \cos(3x) \quad \text{da cui}$$

$$\int e^{2x} \cdot \cos(3x) dx = \frac{3}{13} e^{2x} \cdot \sin(3x) + \frac{2}{13} e^{2x} \cdot \cos(3x) \quad \text{VERIFICA !!}$$

Allo stesso modo si fanno tutte le primitive del tipo

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx \quad \int e^{ax} \cdot \cos(bx) dx \quad \int e^{ax} \sin(bx) \cos(cx) dx$$

Infatti con 2 passaggi per parti si ottiene il grande ritorno (se si sta attenti a non tornare indietro).

$$\text{Esempio 2} \quad \int \log x dx = \int \underbrace{1}_g \cdot \underbrace{\log x}_F dx = \underbrace{x}_G \cdot \underbrace{\log x}_F - \int \underbrace{x}_G \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_f dx$$

$$= x \log x - \int 1 dx = x \log x - x = x (\log x - 1)$$

Esempio 3 $\int \log^2 x \, dx = \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\log^2 x} \, dx$

fatto prima
↑

$$= \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\log^2 x} - \int \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{2 \cdot \log x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{x}} \, dx = x \cdot \log^2 x - 2 \int \log x \, dx$$

$$= x \log^2 x - 2x \log x + 2x$$

Allo stesso modo si fanno le primitive del tipo

$$\int \log^k x \, dx \quad \int p(x) \cdot \log^k x \, dx \quad \text{con } p(x) \text{ polinomio}$$

Esempio 4 $\int \underset{g}{(x^2-1)} \underset{F}{\log x} \, dx = \left(\underset{G}{\frac{x^3}{3}} - \underset{F}{x} \right) \log x - \int \left(\underset{G}{\frac{x^3}{3}} - \underset{f}{x} \right) \cdot \frac{1}{x} \, dx$

$$= \left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) \log x - \int \left(\frac{1}{3} x^2 - 1 \right) \, dx = \left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) \log x - \frac{1}{9} x^3 + x$$

L'idea è che il logaritmo scende di grado ad ogni passaggio, e il 1 nascosto od il polinomio non peggiorano più di tanto.

Esempio 5 $\int \arctan x \, dx = \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\arctan x} \, dx =$

$$= \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\arctan x} - \int \underset{G}{x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{1+x^2}} \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

Esempio 6 $\int \underset{g}{x} \underset{F}{\arctan x} \, dx = \frac{1}{2} \underset{G}{x^2} \cdot \underset{F}{\arctan x} - \int \frac{1}{2} \underset{G}{x^2} \cdot \underset{f}{\frac{1}{1+x^2}} \, dx$

$$= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x$$

Esempio 7 $\int \cos^5 x \, dx$ 1° modo: parti + grande ritorno

2° modo: percorso + sostituzione

$$\int \cos^5 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos^4 x \, dx = \int \cos x \cdot (1 - \sin^2 x)^2 \, dx$$

Pongo $y = \sin x$, quindi $\frac{dy}{dx} = \cos x$, cioè $dy = \cos x \, dx$

$$= \int (1 - y^2)^2 \, dy = \int (1 - 2y^2 + y^4) \, dy = y - \frac{2}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5$$

$$= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x$$

[Esercizio: confrontare con il risultato ottenuto nel 1° modo]

Esempio 8 $\int \sin^7 x \, dx = \int \sin x \cdot \sin^6 x \, dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x)^3 \, dx$

Pongo $y = \cos x$, quindi $\frac{dy}{dx} = -\sin x$, da cui $dy = -\sin x \, dx$

$$= - \int (1 - \cos^2 x)^3 \underbrace{(-\sin x) \, dx}_{dy} = - \int (1 - y^2)^3 \, dy = - \int (1 - 3y^2 + 3y^4 - y^6) \, dy$$

$$= -y + y^3 - \frac{3}{5} y^5 + \frac{1}{7} y^7 = -\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x$$

Lo stesso sistema funziona per $\int \cos^k(x) \, dx$ e $\int \sin^k(x) \, dx$ purché k sia DISPARI (l'integrazione per parti funziona sempre).

Esempio 10 $\int \cos^4 x \, dx = \int \left[\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right]^2 \, dx$

$$= \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)) \, dx = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{4} \int \cos^2(2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos(4x)}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin(4x)$$

Controllare che sia la stessa
risposta che si ottiene
per parti

Esempio 11 $\int \tan x \, dx$

1° modo Per sostituzione $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$

Pongo $y = \cos x$, quindi $\frac{dy}{dx} = -\sin x$, da cui $dy = -\sin x \, dx$

$$= - \int \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) \, dx = - \int \frac{1}{y} \, dy = -\log |y| = -\log |\cos x|$$

$$= \log \frac{1}{|\cos x|}$$

2° modo Per parti

$$\int \tan x \, dx = \int \underset{g}{\sin x} \cdot \underset{F}{\frac{1}{\cos x}} \, dx = \underset{G}{(-\cos x)} \underset{F}{\frac{1}{\cos x}} - \int \underset{G}{(-\cancel{\cos x})} \underset{f}{\left(-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)} \, dx$$

$$= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -1 + \int \tan x \, dx$$

Grande ritorno con lo stesso
segno!

Semplificando ottengo $0 = -1$.

Domanda: cosa è successo?