

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 075

Titolo nota

22/11/2012

INTEGRAZIONE PER PARTI

Formula fondamentale $\int_a^b \Phi'(x) dx = [\Phi(x)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$

Prendiamo $f(x), g(x), F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$.

$$\Phi(x) = F(x) \cdot G(x), \text{ quindi } \Phi'(x) = F'(x) G(x) + F(x) \cdot G'(x) \\ = f(x) G(x) + F(x) \cdot g(x)$$

Sostituendo nella formula fondamentale:

$$\int_a^b [f(x) \cdot G(x) + F(x) g(x)] dx = [F(x) \cdot G(x)]_a^b$$

$$\int_a^b F(x) g(x) dx = [F(x) \cdot G(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot G(x) dx$$

Formula di INTEGRAZIONE PER PARTI UFFICIALE

$$\int F \cdot g = F \cdot G - \int f \cdot G$$

Formula un po' ABUSIVA

Esempio 1

$$\begin{aligned} \int \underset{F}{x} \underset{g}{e^{+2x}} dx &= \underset{F}{x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{2} e^{2x}} - \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\frac{1}{2} e^{2x}} dx \\ &= \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} \\ &= \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \end{aligned}$$

Verifica: $(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x})' = \cancel{\frac{1}{2} e^{2x}} + \cancel{\frac{1}{2} x \cdot 2 e^{2x}} - \cancel{\frac{1}{2} e^{2x}} = x e^{2x}$

Esempio 2 $\int \underset{F}{x^2} \underset{g}{e^{-2x}} dx = \underset{F}{x^2} \underset{G}{\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)} - \int \underset{f}{2x} \underset{G}{\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)} dx$

$$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} + \int \underset{F}{x} \underset{g}{e^{-2x}} dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} + \underset{F}{x} \underset{G}{\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)} - \int \underset{f}{1} \underset{G}{\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)} dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x}$$

Verifica: $[]' = \cancel{-\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot e^{-2x}} + \cancel{\frac{1}{2} x^2 \cdot 2e^{-2x}} - \cancel{\frac{1}{2} e^{-2x}} + \cancel{\frac{1}{2} x \cdot 2 \cdot e^{-2x}} + \frac{1}{2} e^{-2x}$ Ok

Esempio 3 $\int \underset{F}{x} \cdot \underset{g}{\cos(3x)} dx = \underset{F}{x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{3} \sin(3x)} - \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\frac{1}{3} \sin(3x)} dx$

$$= \frac{1}{3} x \sin(3x) - \frac{1}{3} \int \sin(3x) dx$$

$$= \frac{1}{3} x \sin(3x) + \frac{1}{9} \cos(3x)$$

Con questo sistema si fanno tutte le primitive del tipo:

$$\int p(x) \cdot e^{ax} dx \quad \int p(x) \cdot \cos(ax) dx \quad \int p(x) \cdot \sin(ax) dx$$

dove $p(x)$ è un polinomio. L'idea è che il grado del polinomio scende di uno ad ogni passaggio per parti (perché si deriva)

Oss. Le funzioni del tipo $\int \sin(ax) \cdot \sin(bx) dx$, $\int \sin(ax) \cdot \cos(bx) dx$

$\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx$ si trattano facilmente usando le formule

"PRODUCT TO SUM" (formule trigonometriche). Stessa cosa se c'è anche $\cos$

Esempio 4 $\int \cos^2 x \, dx$

1° modo PER PARTI

$$\begin{aligned}
 \int \cos^2 x \, dx &= \int \underset{F}{\cos x} \cdot \underset{g}{\cos x} \, dx = \underset{F}{\cos x} \cdot \underset{G}{\sin x} - \int \underset{f}{(-\sin x)} \cdot \underset{G}{\sin x} \, dx \\
 &= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, dx \\
 &\quad \downarrow \text{PRECORSO} \\
 &= \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx \\
 &= \cos x \cdot \sin x + \int 1 \cdot dx - \int \cos^2 x \, dx \\
 &= \cos x \cdot \sin x + x - \int \cos^2 x \, dx
 \end{aligned}$$

GRANDE RITORNO:

quello da cui sono partito a sx torna a dx ma con un coeff. diverso. Ora lo porto a sx

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + x, \text{ da cui } \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x$$

2° modo Recorso da subito: formule di duplicazione

$$\begin{aligned}
 \cos(2x) &= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \quad \text{da cui} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \\
 \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Allora } \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int 1 \, dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x)
 \end{aligned}$$

Oss. Le due primitive sono la stessa in quanto

$$\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x \cdot \cos x$$

Esempio 4 $\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int 1 \, dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx$
 $= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin(2x).$

Esempio 5 $\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x \, dx = \sin^2 x \cdot (-\cos x)$

$\begin{matrix} & & g & & f & & f & & g \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \end{matrix}$

$- \int 2 \sin x \cdot \cos x (-\cos x) \, dx$

$\begin{matrix} & & & & 1 - \sin^2 x & & & & \\ & & & & \uparrow & & & & \end{matrix}$

$= -\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \int \sin x \cdot \cos^2 x \, dx = -\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \int \sin x - \sin^3 x \, dx$

$= -\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \int \sin x - 2 \int \sin^3 x \, dx$

GRANDE RITORNO

$$3 \int \sin^3 x \, dx = -\sin^2 x \cdot \cos x - 2 \cos x \Rightarrow \int \sin^3 x \, dx = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x$$

Esempio 6 $\int \cos^4 x \, dx = \int \underset{g}{\cos x} \cdot \underset{F}{\cos^3 x} \, dx$

$= \underset{G}{\sin x} \cdot \underset{F}{\cos^3 x} - \int \underset{G}{\sin x} \cdot \underset{F}{3 \cos^2 x} (-\sin x) \, dx = \sin x \cdot \cos^3 x + 3 \int \overset{1-\cos^2 x}{\sin^2 x} \cos^2 x \, dx$

$= \sin x \cdot \cos^3 x + \boxed{3 \int \cos^2 x \, dx} - \boxed{3 \int \cos^4 x \, dx}$

Fatto prima *grande ritorno*

$$4 \int \cos^4 x \, dx = \sin x \cdot \cos^3 x + 3 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos^3 x + \frac{3}{2} x + \frac{3}{2} \sin x \cos x$$

Oss. Allo stesso modo si fanno

$$\int \sin^k x \, dx \quad \text{e} \quad \int \cos^k x \, dx$$

Ad ogni passaggio per punti (+ percorso + grande ritorno) il grado k scende di 2.