

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 074

Titolo nota

21/11/2012

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Formula fondamentale

$$\int_a^b [\Phi'(x)] dx = [\Phi(x)]_a^b$$

L'integrale di una derivata è la funzione stessa valutata tra gli estremi

Uso questa formula con $\Phi(x) = F(G(x))$. Per comodità pongo $G'(x) = g(x)$, $F'(x) = f(x)$.

Per la derivata della funzione composta abbiamo che

$$\Phi'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x) = f(G(x)) g(x), \text{ quindi}$$

$$\int_a^b \Phi'(x) dx = \int_a^b f(G(x)) g(x) dx$$

$$[\Phi(x)]_a^b = [F(G(x))]_a^b = F(G(b)) - F(G(a))$$

$$= [F(x)]_{G(a)}^{G(b)} = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx$$

uso nuovamente la formula fondamentale

Uguagliando il 1° e l'ultimo ottengo

$$\int_a^b f(G(x)) g(x) dx = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx$$

Formula di INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Supponiamo di voler calcolare $\int_a^b f(G(x)) g(x) dx$. Pongo $y = G(x)$.

Quando $x = a$ ho che $y = G(a)$

" $x = b$ ho che $y = G(b)$

$$\frac{dy}{dx} = G'(x) = g(x)$$

↑ derivata di y
rispetto ad x

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$dy = g(x) dx$$

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(G(x)) g(x) dx$$

$\downarrow$ $G(b)$
 $\downarrow$ $G(a)$
 $\downarrow$ $f(y)$
 $\downarrow$ dy

$$= \int_{G(a)}^{G(b)} f(y) dy = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx$$

Quindi il procedimento brutale riproduce lo stesso risultato ottenuto rigorosamente.

Lo stesso discorso vale per gli integrali indefiniti.

Esempio 1 $\int x^2 \cos(x^3) dx$

Pongo $y = x^3$. Allora

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2, \text{ cioè } dy = 3x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \cos(x^3) \cdot 3x^2 dx$$

ritorno in x

$$= \frac{1}{3} \int \cos y dy = \frac{1}{3} \sin y = \frac{1}{3} \sin(x^3)$$

Derivare per verifica!

Esempio 2 $\int x^5 e^{-x^6} dx$

Pongo $y = x^6$. Allora

$$\frac{dy}{dx} = 6x^5, \text{ cioè } dy = 6x^5 dx$$

$$= \frac{1}{6} \int e^{-x^6} \cdot 6x^5 dx$$

$$= \frac{1}{6} \int e^{-y} dy = -\frac{1}{6} e^{-y} = -\frac{1}{6} e^{-x^6}$$

Esempio 3 $\int \sin x \cdot e^{\cos x} dx$

Pongo $y = \cos x$. Allora

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x, \text{ cioè } dy = -\sin x dx$$

$$= - \int e^{\cos x} (-\sin x) dx$$

$$= - \int e^y dy = -e^y = -e^{\cos x}$$

Esempio 4 $\int \frac{x}{1+x^2} dx$

Pongo $y = 1+x^2$. Allora $\frac{dy}{dx} = 2x$, cioè $dy = 2x dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \boxed{2x dx}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} \cdot dy = \frac{1}{2} \log |y| = \frac{1}{2} \log |1+x^2| = \frac{1}{2} \log (1+x^2)$$

Invece $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$. Basta cambiare poco l'integranda per avere primitive molto diverse.

Esempio 5 $\int \frac{ax+b}{1+x^2} dx = a \int \frac{x}{1+x^2} dx + b \int \frac{1}{1+x^2} dx$

$$= \frac{a}{2} \log (1+x^2) + b \arctan x$$

Esempio 6 $\int \frac{1}{2+x^2} dx = \int \frac{1}{2 \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx$

Pongo $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$, quindi $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, cioè $dy = \frac{dx}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1+y^2} \cdot dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan y$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Allo stesso modo:

$$\boxed{\int \frac{1}{a+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}} \quad \forall a > 0}$$

TABELLINA

Esempio 7 $\int \frac{\log^3 x}{x} dx$

Pongo $y = \log x$. Allora $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

$$= \int \log^3 x \cdot \frac{1}{x} dx$$

cioè $dy = \frac{dx}{x}$

$$= \int y^3 dy = \frac{1}{4} y^4 = \frac{1}{4} \log^4 x$$

La cosa fondamentale è che $\boxed{\frac{1}{x}}$ è la derivata di $\boxed{\log x}$
 $g(x)$ $G(x)$

Esempio 8 $\int \frac{1}{\log^3 x \cdot x} dx$

$y = \log x$ da cui ... $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

$$= \int \frac{1}{\log^3 x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{y^3} dy = -\frac{1}{2} \frac{1}{y^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\log^2 y}$$

In generale $\int \frac{\log^\alpha x}{x} dx = \frac{1}{\alpha+1} \log^{\alpha+1} x$ se $\alpha \neq -1$

Esempio 9 Stessa cosa con $\alpha = -1$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \log x} dx &= \int \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} dx && \text{Come sempre } y = \log x, \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \\ &= \int \frac{1}{y} \cdot dy = \log |y| = \log |\log x| \end{aligned}$$

Esempio 10 $\int \frac{x}{1-x^2} dx$

Pongo $1-x^2 = y$, quindi
 $\frac{dy}{dx} = -2x$, cioè $dy = -2x dx$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x^2} \underbrace{(-2x) dx}_{dy} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{2} \log |1-x^2| \\ &= \log \frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}} \end{aligned}$$

Funzionava anche con $y = x^2$ (prova!) $\rightarrow$

Esempio 11 $\int \frac{1}{ax+b} dx$

Pongo $y = ax+b$...

$$= \frac{1}{a} \log |ax+b|$$

— 0 — 0 —