

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 073

Titolo nota

21/11/2012

Per calcolare $\int_a^b f(x) dx$, se $f(x)$ è continua cerco una funzione $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. A questo punto

UNA
primitiva

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

Tecniche di integrazione: data $f(x)$, trovare $F(x)$

- Primitive elementari
- Integrazione PER PARTI
- Integrazione PER SOSTITUZIONE
- Integrazione FUNZIONI RAZIONALI
- Sostituzioni razionalizzanti

PRIMITIVE ELEMENTARI

Notazione: INTEGRALE INDEFINITO (senza estremi)

$\int f(x) dx =$ una qualunque primitiva

$$\int 2x dx = x^2$$

$$\int 1 dx = x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1}$$

$$\int \cos R x dx = \sin R x$$

$$\int \sin R x = -\cos R x$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$$

OK per ogni $\alpha \neq -1$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x \quad \text{OK per } x > 0$$

Oss. È vero che $(\log x)' = \frac{1}{x}$ per ogni $x > 0$

Ancora meglio $\int \frac{1}{x} dx = \log |x|$ Ok per $x \neq 0$.

Infatti per $x > 0$ è quella di prima. Per $x < 0$ abbiamo che

$$\log |x| = \log(-x) \quad \text{quindi} \quad (\log |x|)' = (\log(-x))' = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}$$

Oss. Per controllare che $F(x)$ sia effettivamente una primitiva di $f(x)$ basta fare la derivata. Questa è una dim. completa dell'essere una primitiva.

— o — o —

Discorso del +c $\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + c$

In questo caso l'espressione $\frac{1}{3} x^3 + c$ rappresenta, al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$, l'insieme di tutte le primitive di x^2 .

Però NON è sempre così. Se scrivo

$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + c$ NON ho scritto l'insieme di tutte le primitive. In questo esempio l'insieme di definizione di $\frac{1}{x}$ è fatto da 2 pezzi: $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Posso quindi usare "c diversi su pezzi diversi". Per esempio

$$F(x) = \begin{cases} \log x + 5 & \text{per } x > 0 \\ \log(-x) + 8 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

ho ottenuto una primitiva di $\frac{1}{x}$

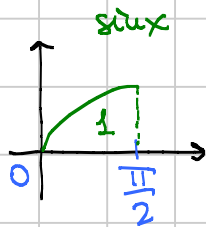
Qual è il senso del +c?

- ① Per il calcolo esplicito di un integrale su un intervallo NON SERVE (si semplifica quando facciamo $[F(x)]_a^b$)
- ② Per descrivere l'insieme di tutte le primitive NON BASTA, almeno se l'insieme di definizione è fatto da più pezzi.

Quindi inutile metterlo.

— o — o —

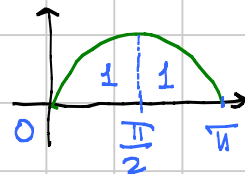
Esempio 1 $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \left[\underbrace{-\cos x}_{F(x)} \right]_0^{\pi/2} = \underbrace{-\cos \frac{\pi}{2}}_{F(b)} - \underbrace{(-\cos 0)}_{F(a)} = 0 - (-1) = 1.$



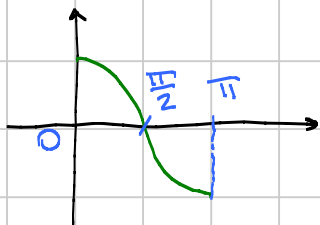
Achtung! L'integrale di una funzione $f(x) \geq 0$ e non identicamente nulla NON PUÒ VERIRE ≤ 0 . Quindi se viene -1 e uno non se ne accorge NON È UN ERRORE DI CALCOLO !!!

Esempio 2 $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$

Si poteva vedere anche "geometricamente"



Esempio 3 $\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$



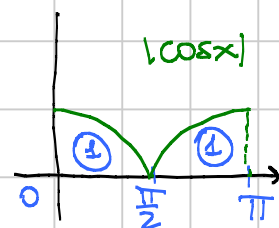
Geometricamente: le 2 aree sono uguali e si compensano (una con il segno +, una con il segno -).

Esempio 4 $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_{\pi/2}^{\pi} = \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$

Il fatto che venga -1 ($0 - 1$) è consistente con il fatto che il grafico di $\sin x$ e $\cos x$ si ottengono l'uno dall'altro per traslazione

Esempio 5 $\int_0^{\pi} |\cos x| \, dx$ EVITARE COSE CREATIVE TIPO $\int |\cos x| \, dx = |\sin x|$ o simili

Geometricamente si vede che viene 2



Algebricamente bisogna spezzare le zone

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{per } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\cos x & \text{per } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} \quad \text{quindi}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |\cos x| dx &= \int_0^{\pi/2} |\cos x| dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |\cos x| dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx \end{aligned}$$

da qui in poi si può procedere con le primitive.

Achtung! Nel calcolare $\int_a^b |f(x)| dx$, posso far entrare in gioco le primitive solo dopo aver spezzato le zone.

Esempio 6 $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \quad \int \cos(5x) dx = \frac{1}{5} \sin(5x)$

$$\int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} \quad \int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \log|x| = \log \sqrt{|x|}$$

$$\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{1}{-5+1} x^{-5+1} = -\frac{1}{4} x^{-4} = -\frac{1}{4} \frac{1}{x^4}$$

$$\int 2^{7x} dx = \frac{1}{7 \log 2} 2^{7x} \quad \left[\frac{1}{7 \log 2} \cdot 2^{7x} \right]' = \frac{1}{7 \log 2} \cdot 2^{7x} \cdot \log 2 \cdot 7$$

$$\int \frac{1}{3^x} dx = \int 3^{-x} dx = -\frac{1}{\log 3} \cdot 3^{-x}$$

$$\int \cos(x+5) dx = \sin(x+5)$$

$$\int \sin(3x+4) dx = \frac{1}{3} [-\cos(3x+4)] = -\frac{1}{3} \cos(3x+4).$$