

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 072

Titolo nota

17/11/2012

Come si calcolano gli integrali

Def. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Si dice che $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una PRIMITIVA di $f(x)$ se

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Oss. La primitiva, posto che esista, non è mai unica. Infatti: se $F(x)$ è una primitiva, anche $F(x) + c$ è una primitiva.

Tecnica di calcolo degli integrali Sia $F(x)$ una qualunque primitiva di $f(x)$ in $[a, b]$. Allora per ogni intervallo $[c, d] \subseteq [a, b]$ si ha che

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$$

Notazione

$$F(d) - F(c) = [F(x)]_c^d = [F(x)]_{x=c}^{x=d}$$

Oss. Grazie a questa tecnica, il calcolo degli integrali è ridotto al calcolo di una primitiva qualunque, cioè dell'operazione inversa rispetto alla derivata (in inglese: primitiva = ANTIDERIVATIVE)

1° PASSO Il valore di $F(d) - F(c)$ non dipende dalla primitiva che considero

Lemma fondamentale Se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ sono due primitive di $f(x)$ nello stesso intervallo $[a, b]$, allora

$F_1(x) - F_2(x)$ è una funzione costante.

Dim. Dimostro che $F_1(x) - F_2(x)$ ha lo stesso valore che nell'estremo a . Detto meglio: pongo $G(x) \stackrel{= F_1 - F_2}{=}$ e faccio vedere che

$$G(x) = G(a) \quad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

Osservo intanto che

$$\begin{aligned} G'(x) &= F_1'(x) - F_2'(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$G(x) - G(a) = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{Lagrange}}}{G'(c)} \cdot (x-a) = 0$$

— 0 — 0 —

Dato per buono il lemma, se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ sono 2 primitive della stessa $f(x)$, allora $F_2(x) - F_1(x) = \alpha$ costante, quindi

$$F_2(x) = F_1(x) + \alpha, \text{ quindi}$$

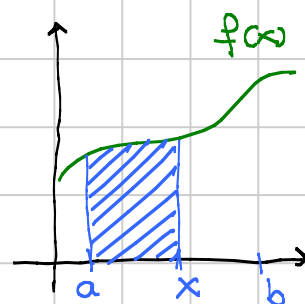
$$\begin{aligned} [F_2(x)]_c^d &= F_2(d) - F_2(c) = [F_1(d) + \alpha] - [F_1(c) + \alpha] \\ &= F_1(d) + \cancel{\alpha} - F_1(c) - \cancel{\alpha} \\ &= F_1(d) - F_1(c) \\ &= [F_1(x)]_c^d \\ &\text{— 0 — 0 —} \end{aligned}$$

2° PASSO Consideriamo la FUNZIONE INTEGRALE

Per ogni $x \in [a, b]$, posso calcolare l'integrale tra a e x .

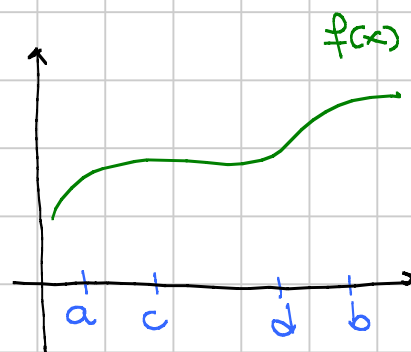
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Funzione} \\ \text{integrale}}}{\Phi(x)} = \int_a^x f(t) dt$$

variabile di integrazione



A cosa serve la funzione integrale?

$$\begin{aligned} \int_c^d f(x) dx &= \int_a^d f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \\ &= \Phi(d) - \Phi(c) = [\Phi(x)]_c^d \end{aligned}$$



3° PASSO

Se dimostro che $\Phi(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora ho finito, cioè ho dimostrato che

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{primitiva}}}{F(x)} \right]_a^b$$

Resta da dimostrare che $\Phi'(x) = f(x)$.

Teorema 1 (teorema della media integrale).

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile e continua. Siano
Allora $\exists c \in [a, b]$ t.c.

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{f(c)}_{\substack{\uparrow \\ \text{valore in} \\ \text{p.to misterioso}}} \underbrace{(b-a)}_{\substack{\text{ampiezza} \\ \text{intervallo}}}$$

Dim. Siano

$$m = \min \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

$$M = \max \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

Allora

$$\underbrace{m(b-a)}_{\substack{\uparrow \\ \text{area rett. con} \\ \text{base } [a, b] \text{ e altezza } m}} \leq \int_a^b f(x) dx \leq \underbrace{M(b-a)}_{\substack{\uparrow \\ \text{area rettangolo con base} \\ [a, b] \text{ ed altezza } M}}$$

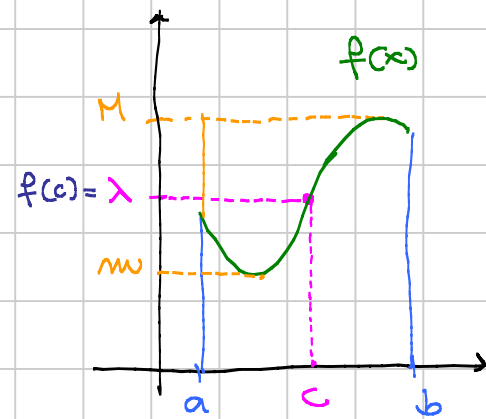
Allora dividendo:

$$m \leq \boxed{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx} \leq M$$

numero λ compreso tra m ed M

Per il teo. di esistenza degli zeri e varianti si ha che $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = \lambda$, cioè

$$f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx. \text{ Moltiplicando si ha la tesi}$$



Teorema 2 (Teo. fondamentale del calcolo integrale)

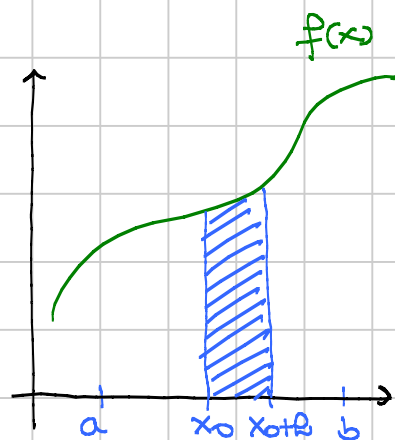
La funzione integrale è una primitiva di $f(x)$, cioè

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Dim. Voglio dim. che $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Parto dal rapporto incrementale

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \{ \Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) \} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \int_a^{x_0+h} f(x) dx - \int_a^{x_0} f(x) dx \right\} \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx = \frac{1}{h} \cdot \underbrace{h}_{\text{ampiezza intervallo}} \cdot \underbrace{f(c)}_{\substack{\text{p.to esistenziale in } [x_0, x_0+h] \\ \uparrow \\ \text{ad essere preciso dovrei scrivere } f(c_0)}} \end{aligned}$$



Facendo il limite

$$\begin{aligned} \Phi'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

perché

$$\boxed{x_0} \leq \underbrace{(c_h)}_{\substack{\downarrow \\ x_0.}} \leq \boxed{x_0+h}$$