

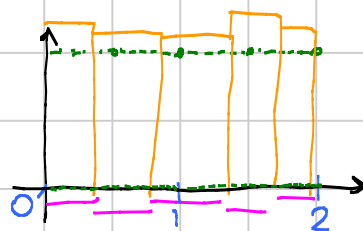
ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 071

Titolo nota

17/11/2012

Esempio in cui $I^+ > I^-$ Sia $[a, b] = [0, 2]$ e sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



Il grafico è "INDISEGNABILE".

Le somme di Riemann superiori, cioè gli integrali corrispondenti a $\varphi(x)$ a gradino $\geq f(x)$, sono tutte ≥ 2 (perché $\varphi(x)$ deve essere ≥ 1 in tutto $[0, 2]$).

Analogamente le somme di Riemann inferiori sono tutte ≤ 0 .

Quindi in questo esempio si ha che

$$I^+(f; [0, 2]) = 2, \quad I^-(f; [0, 2]) = 0$$

Teorema Si ha che $I^+ = I^-$, e dunque la funzione è integrabile, in tutti questi casi

- ① Se la funzione è monotona
- ② Se la funzione è continua
- ③ Se la funzione è continua a tratti, cioè è continua ovunque tranne in un numero finito di punti.

Proprietà dell'integrale

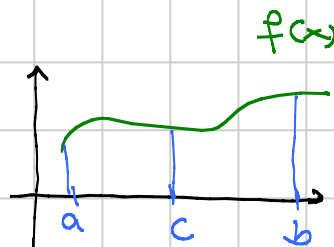
$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

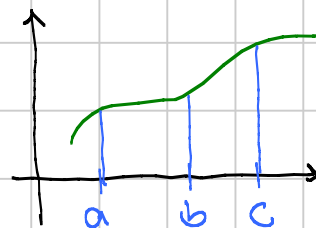
$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \text{Nulla di furbo}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

L'integrale è un'applicazione LINEARE (da dove a dove?)



Oss. Se c è esterno all'intervallo $[a, b]$, vale ancora la formula precedente



$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$$

$$= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

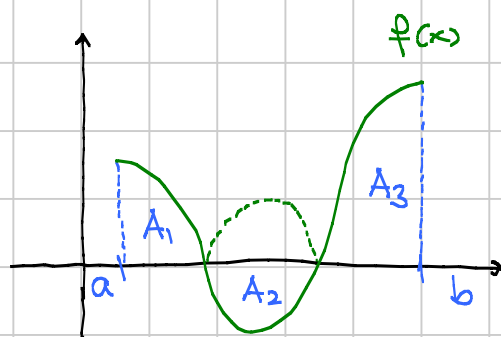
↑ estremi invertiti: vedi accordo iniziale

L'accordo è giustificato dall'aver la stessa formula (additività rispetto alla zona di integrazione) senza porsi il problema se $c \in [a, b]$ oppure no.

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \text{Area}(A_1) - \text{Area}(A_2) + \text{Area}(A_3)$$

$$\int_a^b |f(x)| dx = \text{Area}(A_1) + \text{Area}(A_2) + \text{Area}(A_3)$$



La formula dice che $|A_1 - A_2 + A_3| \leq A_1 + A_2 + A_3$

Tutte le proprietà enunciate si dimostrano prima nel caso banale, poi per le step functions, poi nel caso generale facendo sup e inf.

Criterio di integrabilità Una funzione $f(x)$ è integrabile secondo Riemann se e solo se esistono 2 funzioni

a gradino $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ b.c.

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

e

$$\int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) dx \leq \varepsilon$$

Inoltre posso supporre che φ_1 e φ_2 arrivino dalla stessa suddivisione di $[a, b]$.

Dim.

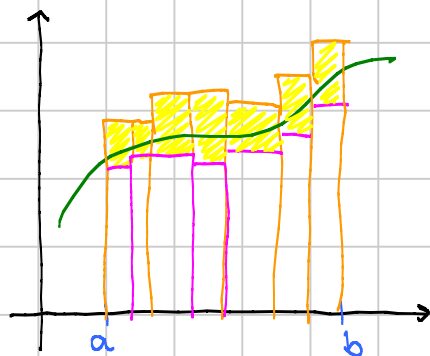
$\downarrow \downarrow \leftarrow \text{distanza} \leq \varepsilon$
 $I^- = I^+$

Se $I^- = I^+$, vuol dire che per ogni $\varepsilon > 0$ trovo una somma superiore ed una somma inferiore la cui distanza è $\leq \varepsilon$.

Ora

$$\int_a^b \varphi_2(x) dx - \int_a^b \varphi_1(x) dx = \text{area in mezzo (gialla in figura)} \leq \varepsilon.$$

$\uparrow$ funzione sopra $\uparrow$ funzione sotto



Bruttalmente: $f(x)$ è integrabile $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ esistono rettangoli sopra e sotto con l'intercapedine che ha area $\leq \varepsilon$.

— o — o —

Dim. che le funzioni monotone (anche non continue) sono integrabili.

Basta trovare $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ come prima.

Divido $[a, b]$ in n parti uguali.

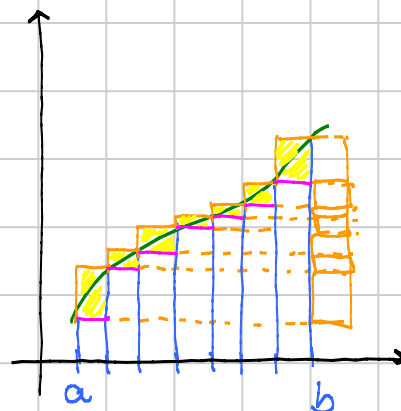
Poi posso pensare di sovrapporre tutte le intercapedini in modo da formare un rettangolo che ha base di lung. $\frac{b-a}{n}$ e altezza $f(b) - f(a)$.

Quindi la somma delle intercapedini è

$$(f(b) - f(a)) \cdot \frac{b-a}{n}$$

e questo diventa piccolo a piacere per di prendere n grande.

— o — o —

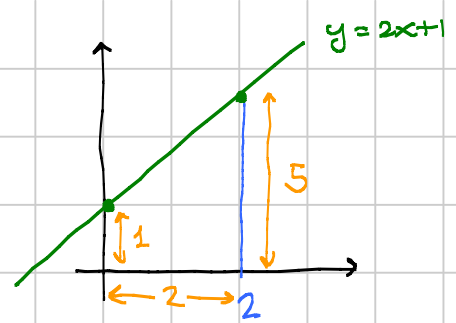


Esempio 1 $\int_0^2 (2x+1) dx$

= area trapezoido

= $\frac{1}{2}$ somma basi $\cdot$ altezza

$$= \frac{1}{2} (1+5) \cdot 2 = 6$$

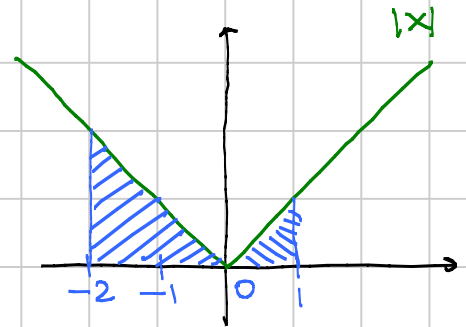


Esempio 2 $\int_{-2}^1 |x| dx$

[Evitare cose creative stile |primitiva|]

$$\int_{-2}^1 |x| dx = \text{somma aree di 2 triangoli}$$

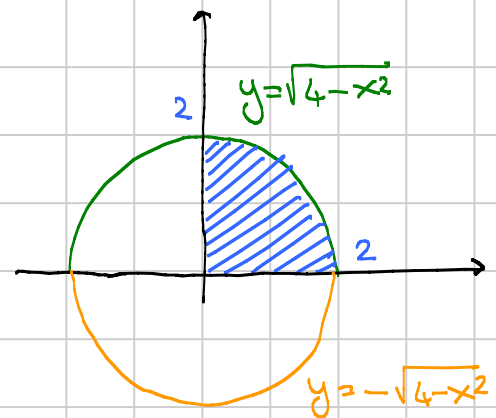
$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$



Esempio 3 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$

grafico di $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

$$y = \sqrt{4-x^2}, \quad y^2 = 4-x^2, \quad x^2+y^2 = 4$$



$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \text{Area di } \frac{1}{4} \text{ di cerchio}$$

$$= \frac{1}{4} \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi \cdot 4 = \pi$$