

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 070

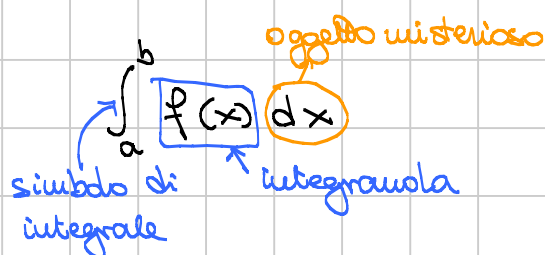
Titolo nota

17/11/2012

- INTEGRALI**
- Come si indicano
 - Significato geometrico
 - Come si definiscono
 - Come si calcolano

Notazioni Ingredienti degli INTEGRALI PROPRI

- ① Zona di integrazione: intervallo $[a, b]$, quindi un insieme limitato
- ② Funzione integranda: funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata
cioè $\exists M$ t.c. $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$



$\int_a^b f(x) dx$

simbolo di integrale

oggetto misterioso

integranda

a e b sono gli "estremi di integrazione"

Notazioni estese: per definizione si pone

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (\text{estremi uguali})$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (\text{estremi "al contrario"}) \quad a < b$$

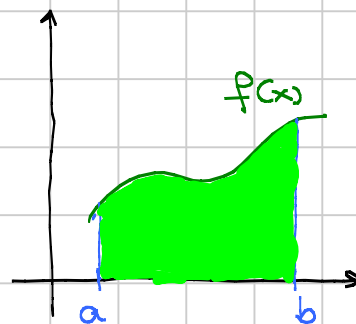
Significato geometrico

$\int_a^b f(x) dx$ è un numero che rappresenta

l'area **CON SEGNO**

della parte di piano compresa tra

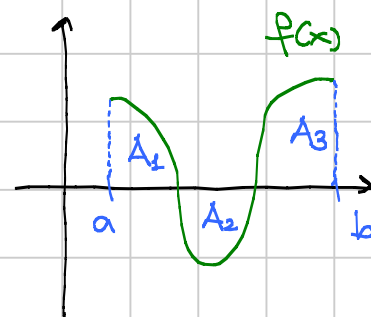
l'asse x ed il grafico di $f(x)$, con $x \in [a, b]$



Area con segno: parti sopra asse x contano con il segno +
" sotto asse x contano con il segno -

Nella figura a fianco si avrebbe

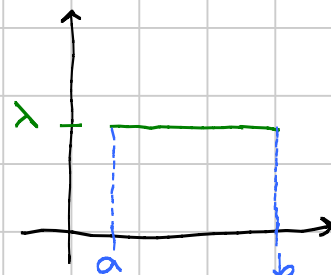
$$\int_a^b f(x) dx = \text{Area}(A_1) - \text{Area}(A_2) + \text{Area}(A_3)$$



Definizione

3 PASSI $\begin{cases} \nearrow \text{Caso banale} \\ \rightarrow \text{Caso semi-banale} \\ \searrow \text{Caso generale} \end{cases}$

Caso banale $f(x) \equiv \lambda$, cioè $f(x)$ è una funzione costante che vale λ per ogni $x \in [a, b]$



$$\int_a^b f(x) dx = \text{area con segno del rettangolo}$$

$$= \underbrace{(b-a)}_{\text{lunghezza base}} \cdot \underbrace{\lambda}_{\text{altezza con segno}}$$

Caso semi-banale $f(x)$ è costante a tratti, cioè esistono numeri

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

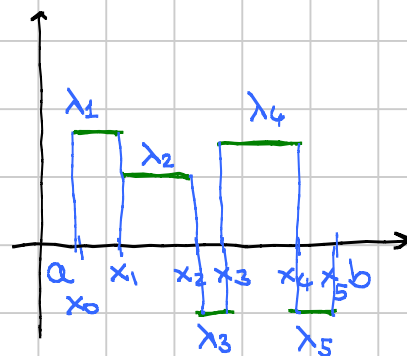
ed esistono numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che

$$f(x) = \lambda_i \text{ per ogni } x \in [x_{i-1}, x_i]$$

In questo caso

$$\int_a^b f(x) dx = \text{somma algebrica delle aree con segno dei vari rettangoli}$$

$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{lunghezza base rettangolo } i\text{-esimo}} \cdot \underbrace{\lambda_i}_{\text{altezza rettangolo } i\text{-esimo}}$$



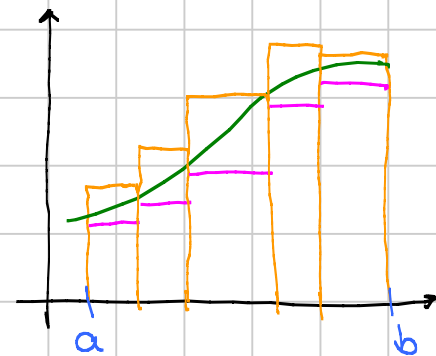
Terminologia: le funzioni di questo tipo si chiamano funzioni semplici, o funzioni a gradino, o STEP FUNCTIONS

Caso generale Sia ora $f(x)$ una funzione limitata qualunque.

Definisco

→ l'integrale superiore $I^+(f, [a, b])$ e

→ l'integrale inferiore $I^-(f, [a, b])$



$I^+(f, [a, b])$ = estremo inferiore delle aree arancioni

$$= \inf \left\{ \underbrace{\int_a^b \varphi(x) dx}_{\substack{\text{integrale} \\ \text{seguibonale}}} : \varphi(x) \text{ è una step function e } \varphi(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \right\}$$

Oss. Per andare verso l'inf occorre rendere la suddivisione molto fitta e cercare di non sfiorare molto con le altezze,

$I^-(f, [a, b])$ = estremo superiore delle aree fucsia

$$= \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi(x) \text{ è una step function e } \varphi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \right\}$$

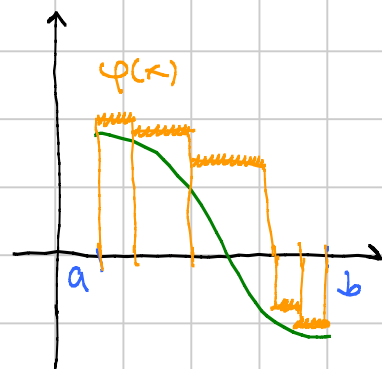
Oss.1 L'ipotesi che f sia limitata garantisce l'esistenza di almeno una step function $\geq f(x)$ e almeno una $\leq f(x)$

(rettangolini che contengono l'area in questione).

Questo garantisce che sto facendo sup e inf di insiemi non vuoti.

Oss.2 Occhio a cosa vuol dire $f(x) \geq \varphi(x)$ e $f(x) \leq \varphi(x)$ nel caso in cui $f(x)$ non ha segno costante.

Si scambiano "contenere" ed "essere contenuti".



Teorema Per ogni funzione limitata $f(x)$ si ha che l'integrale superiore ed inferiore esistono per forza (sono sup e inf)
Inoltre

$$I^-(f; [a, b]) \leq I^+(f; [a, b])$$

Def. Si dice che $f(x)$ è INTEGRABILE SECONDO RIEMANN nell'intervallo $[a, b]$ se

$$I^-(f; [a, b]) = I^+(f; [a, b])$$

Oss. In generale tutti gli elementi che intervengono nella def. di I^+ sono $\geq$ di quelli che intervengono nella def. di I^- .

In tal caso si pone

$$\int_a^b f(x) dx = I^+(f, [a, b]) = I^-(f, [a, b])$$



Vuol dire che nel disegno le due zone "si toccano".