

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 069

Titolo nota

16/11/2012

Esercizio 1 $a_{n+1} = \log(1 + na_n)$ $a_1 = 2$

$$a_1 = 2 \quad a_2 = \log(1 + 1 \cdot a_1) = \log 3 = 1, \dots \quad a_3 = \log(1 + 2a_2) = \log(3, \dots) = 1, \dots$$

PIANO (i) $a_n \geq 1$ per ogni $n \geq 1$
(ii) $a_n \rightarrow +\infty$

Dim (i) Induzione $n=1$ ok $a_1 \geq 1$

Passo induttivo: Ipotesi: $a_n \geq 1$ Tesi: $a_{n+1} \geq 1$

$$\text{Dim. } a_{n+1} = \log(1 + na_n) \geq \log(1 + n) \geq 1$$

$\uparrow$ ricom. $\uparrow$ uso Hp + monotonia di log $\uparrow$ spero

Speranza ok se $1+n \geq e$, cioè se $n \geq 2$. Questo dice che devo controllare anche il passo base $n=2$, cioè $a_2 \geq 1$ che ho fatto all'inizio.

Dim (ii) Dal pto (i) sappiamo che $a_{n+1} \geq \log(1+n)$

$\downarrow +\infty$ $\downarrow +\infty$

Per confronto abbiamo che $a_{n+1} \rightarrow +\infty$, quindi anche $a_n \rightarrow +\infty$.

— 0 — 0 —

Esempio 2 $a_0 = 2012$ $a_{n+1} = 37 + \frac{n^{20} + 5}{2^n} a_n$

È abbastanza chiaro che $a_n \rightarrow 37$ (si vede che se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora di sicuro $l = 37$).

PIANO: LIM+CAR

(i) $0 \leq a_n \leq q.c.$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_n \rightarrow 37$

Dico (ii) Dal p.to (i) sappiamo che

$$\boxed{37} \leq a_{n+1} \leq 37 + \frac{n^{20}+5}{2^n} q.c.$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 37 37 37

Solito finale.

Problema: trovare q.c. che faccia funzionare il p.to (i). La parte $a_n \geq 0$ è una banale induzione. Il problema è $a_n \leq q.c.$

Chiamiamo q.c. = M. Al passo induttivo mi trovo

Ipotesi: $a_n \leq M$ Tesi: $a_{n+1} \leq M$

$$a_{n+1} = 37 + \frac{n^{20}+5}{2^n} a_n \leq 37 + \frac{n^{20}+5}{2^n} M \leq M$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
n.c. uso H_{ip} spero

La speranza può essere vera solo dopo che il coeff. $\frac{n^{20}+5}{2^n}$ è diventato piccolo, e nel frattempo bisogna controllare a mano tutti i passi base fino a lì.

Via d'uscita: esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{n^{20}+5}{2^n} \leq \frac{1}{2}$ per ogni $n \geq n_0$

Buio $M = a_0 + a_1 + \dots + a_{n_0} + 74$. Dico che $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Dico. Per induzione. Passi base: $n=0, 1, 2, \dots, n_0$. È evidente che $a_k \leq M$ per ogni $k \leq n_0$ (in fatti M è la somma di tutti i termini fino ad n_0)

Passo induttivo: Ipotesi: $a_n \leq M$ Tesi: $a_{n+1} \leq M$

$$\text{Dico. } a_{n+1} = 37 + \frac{n^{20}+5}{2^n} a_n \leq 37 + \frac{n^{20}+5}{2^n} M \leq M$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
n.c. H_{ip} spero

Controllo la speranza per $n \geq n_0$. Ho che

$$37 + \frac{n^{20}+5}{2^n} M \leq 37 + \frac{1}{2} M \stackrel{?}{\leq} M \text{ vero } \Leftrightarrow \frac{1}{2} M \geq 37 \Leftrightarrow M \geq 74$$

questo è vero perché in M c'è 74 come addendo

Oss. Se definivo no imponendo $\frac{n^{30} + 5}{2^n} \leq \frac{9}{10}$, mi sarei trovato

$$37 + \frac{9}{10} M \leq M, \text{ che è vero } \Leftrightarrow 37 \leq \frac{1}{10} M \Leftrightarrow M \geq 370,$$

quindi era utile aggiungere 370 nella def. di M.

Esercizio 3 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$ $a_n \rightarrow 0$ quindi può convergere.

Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$.

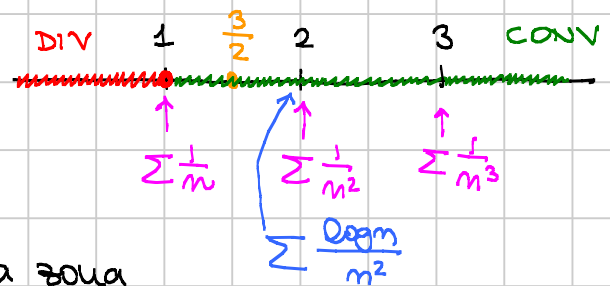
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n^2} \cdot n^2 = +\infty \Rightarrow \text{caso limite}$$

$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty, \text{ quindi definitivamente } \frac{a_n}{b_n} \geq 1, \text{ quindi } a_n \geq b_n \right]$

Ora $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ Boh!!

[Esercizio: provare il confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$... viene $a_n \leq b_n$ definitivamente. $\sum b_n = +\infty \Rightarrow$ boh!!].

Idea: $\frac{\log n}{n^2} \geq \frac{1}{n^2}$, quindi



è "più difficile" che converga, quindi sto andando a sx nel disegno verso la zona rossa. Essendo $\log n$ più debole delle potenze, lo spostamento è piccolo, per cui rimango in zona verde

Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$.

potenza vs log.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n^2} \cdot n^{3/2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0$$

$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$, quindi $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ defm., cioè $a_n \leq b_n$ defm.

$$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{3/2}} \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge.}$$

Oss. Poteva usare, invece di $\frac{3}{2}$, un qualunque esponente $\alpha \in (1, 2)$
($\alpha > 1$ per avere convergenza, $\alpha < 2$ per avanzare n al denominatore
quindi avere limite 0).
— 0 — 0 —