

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 068

.....
Titolo nota

16/11/2012

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 3n}{n+4} \quad a_0 = 2012$$

Supponiamo di sapere (al termine del p.to (iii)) che $a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$.

Come si conclude che $l = 3$?

Dim.

clude che $l = 3$?

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 3n}{n+4}$$

$$l = \frac{\cancel{n} \left(\frac{2a_n}{n} + 3 \right)}{\cancel{n} \left(1 + \frac{4}{n} \right)}$$

$$l = \frac{2l}{1}$$

$$l = 2$$

Esempio 1

$$a_1 = 2012$$

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{7 + a_n}$$

$$a_1 = 2012, \quad a_2 = 2.019, \quad a_3 = \sqrt{2.026} = 40 + \text{q.c.}, \quad a_4 = \sqrt[3]{47 + \text{q.c.}} = 3, \dots$$

Oss. Se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora $l = 1$. Infatti

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{7+a_n} = (7+a_n)^{\frac{1}{3}} \rightarrow (7+e)^0 = 1$$

PIANO

(i) $1 \leq a_n \leq 10.000$ per ogni $n \geq 1$

(ii) $a_n \rightarrow 1$

Dim. di C_i Involuzione $n=1 \rightarrow$ Banale

Passo induttivo Ipotesi : $1 \leq a_n \leq 10.000$ Tesi : $1 \leq a_{n+1} \leq 10.000$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{sporo} & & \text{Hp} & & \text{Hp} & & \text{sporo} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 \leq \sqrt[3]{8} & & \leq \sqrt[3]{7+a_n} & & \leq \sqrt[3]{10.007} & & \leq 10.000 \\ & & \text{"} a_{n+1} \text{"} & & & & \end{array}$$

Speranza 1: $\sqrt[n]{8} \geq \sqrt[n]{1} = 1$ Ok

Speranza 2: falsa per $n=1$, ma per $n \geq 2$ si ha

$$\sqrt[3]{10.007} \leq \sqrt{10.007} = 100 + \text{poco} \leq 10.000$$

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

Ok per $n \geq 2$.

Quindi DOBBIAMO CONTROLLARE A MANO IL CASO $n=2$, cioè

$$1 \leq a_2 \leq 10.000 \quad \text{quindi ok.}$$

2019

Dim (ii) Dal pto (i) sappiamo che

$$\sqrt[n]{8} \leq a_{n+1} \leq \sqrt[n]{10.000}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
1 1 1

Come al solito $a_{n+1} \rightarrow 1$, quindi anche $a_n \rightarrow 1$.

— 0 — 0 —

Esempio 2

$$a_1 = \frac{2}{3}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3}{n^2}$$

Idea: $a_n \rightarrow 0$

PIANO (i) $0 \leq a_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1$

(ii) $a_n \rightarrow 0$

Dim (i) Induzione $n \geq 1$ banale

Passo induttivo: ipotesi: $0 \leq a_n \leq 1$ tesi: $0 \leq a_{n+1} \leq 1$

Dim. Prendo l'ipotesi: $0 \leq a_n \leq 1$

elevo al cubo (che è crescente nella zona $[0,1]$): $0 \leq a_n^3 \leq 1$

Divido per n^2 (posso perché ...)

$$\frac{0}{n^2} \leq \frac{a_n^3}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

" "

$$0 \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq 1 \quad \text{che è la tesi}$$

$\uparrow$
ovvio

Dim (ii) Dal pto (i) sappiamo che

$$0 \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{n^2}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
0 0 0

Solita conclusione.

ALTERNATIVA CON MONOTONIA

(i) $0 \leq a_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1$ (come sopra)

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ " " "

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (solito)

(iv) $l=0$

Dim. (ii) Per induzione $n=1$ $a_2 \leq a_1$, cioè si calcolano a_1 e a_2
 $\frac{8}{27} \leq \frac{2}{3}$ ok

Passo induttivo Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$ Tesi: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

Dim. $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^3}{(n+1)^2} \leq \frac{a_n^3}{(n+1)^2} \leq \frac{a_n^3}{n^2} = a_{n+1}$

$\uparrow$ ricon. $\uparrow$ uso Hp + monotonia di x^3 $\uparrow$ denom. più piccolo

Dim. (iv) Passo al limite nella ricorrenza

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3}{n^2}$$

$\downarrow$ l $\downarrow$ 0

— 0 — 0 —

Esempio 3 $a_{n+1} = \frac{a_n^3}{n^2}$ $a_1 = 2$

Se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora $l = 0$ (p.to (iv) di prima)

L'idea è che $a_n \rightarrow +\infty$: $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_3 = \frac{8^3}{2^2} = 2^7 = 128$

Provo a dimostrare che a_n è crescente: $a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow \frac{a_n^3}{n^2} \geq a_n$

$$\Leftrightarrow a_n^3 \geq n^2 a_n \Leftrightarrow a_n (a_n^2 - n^2) \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{a_n}_{\geq 0} \underbrace{(a_n + n)(a_n - n)}_{\geq 0} \geq 0$$

Per dimostrare che $a_{n+1} \geq a_n$, sembra servire che $a_n \geq n$. Mi serve quindi un p.to (i) del piano che dica che $a_n \geq n$.

Dimostrando per induzione il p.to (i) mi troverei con

Ipotesi: $a_n \geq n$ Tesi: $a_{n+1} \geq n+1$ e nella dim. avrei che

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3}{n^2} \stackrel{\text{Hp}}{\geq} \frac{n^3}{n^2} = n \geq n+1$$

$\uparrow$ spero ☹️

PIANO

(i) $a_n \geq n^2$ per ogni $n \geq 1$

(ii) $a_n \rightarrow +\infty$

Dim (ii) Prendo il p.to (i) e passo al limite concludendo per confronto a 2.

$$\begin{array}{ccc} a_n & \geq & n^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ +\infty & & +\infty \end{array}$$

Dim (i) Per induzione: $n=1$ ok $a_1 \geq 1$

Passo induttivo: Ipotesi: $a_n \geq n^2$ Tesi: $a_{n+1} \geq (n+1)^2$

$$\text{Dim.} \quad a_{n+1} = \frac{a_n^3}{n^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ricor.}}}{\geq} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hp}}}{\frac{n^6}{n^2}} = n^4 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spero}}}{\geq} (n+1)^2$$

Controllo la speranza, cioè se $n^4 \stackrel{?}{\geq} (n+1)^2$

È chiaro che è vero definitivamente, ma questo NON BASTA

$n^4 \geq n^2 + 2n + 1$ e questo si può dimostrare o studiando la funzione oppure verificando a mano per $n=1$ e $n=2$ e poi

$$n^4 = n^2 \cdot n^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se } n \geq 2}}{\geq} 4n^2 = n^2 + \underbrace{2n^2}_{\geq 2n+1} + n^2 \geq n^2 + \underbrace{2n+1}_{\geq 2n+1}$$

Il problema è FARSI VENIRE IN MENTE IL PIANO.