

# ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 067

Titolo nota

16/11/2012

**Successioni per ricorrenza NON AUTONOME**

$$a_0 = \alpha$$

$$a_{n+1} = f(a_n, n)$$

la legge di passaggio  
dipende anche da  $n$

**L'UNICA REGOLA È CHE NON CI SONO REGOLE**

Esempio 1  $a_0 = 2012$   $a_{n+1} = \frac{a_n}{n^2+3}$

$$a_0 = 2012, \quad a_1 = \frac{2012}{3} = 600 + q.c., \quad a_2 = \frac{600 + q.c.}{4} = 150 + q.c.$$

Sembra che  $a_n$  sia decrescente e tenda a 0.

PIANO CON MONOTONIA

PIANO

(i)  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(Facile induzione)

(ii)  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii)  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(Debole. dec. + limitata inf.)

(iv)  $l = 0$

**Dim. (ii)** Ricorrenza + disuguaglianza. Devo dim. che  $a_{n+1} \leq a_n$ , cioè

$$\frac{a_n}{n^2+3} \leq a_n \Leftrightarrow \frac{a_n}{n^2+3} - a_n \leq 0 \Leftrightarrow \frac{a_n(1-n^2-3)}{n^2+3} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{a_n(n^2+2)}{n^2+3} \leq 0$$

$$\frac{a_n(n^2+2)}{n^2+3} \geq 0 \Leftrightarrow a_n \geq 0 \text{ che è vero per il punto (i)}$$

**Dim. (iv)** Sappiamo che  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ . Allora passo al limite nella ricor.

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n^2+3} \rightarrow \frac{l}{+\infty} = 0$$

**Achtung!** Evitare questa scrittura:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n^2+3} \rightarrow \frac{l}{n^2+3} \rightarrow 0$$

LIMITE METÀ  
PER VOLTA

— 0 — 0 —

## PIANO CON RAPPORTO

(i)  $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Facile indagine)

(ii)  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0$ , dunque  $a_n \rightarrow 0$ .

Dim. (ii)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{a_n}}{n^2+3} \cdot \frac{1}{\cancel{a_n}} = \frac{1}{n^2+3} \rightarrow 0$$

↑  
uso  
ricorr.

## PIANO LIMITATEZZA + CARABINIERI

(i)  $0 \leq a_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii)  $a_n \rightarrow 0$

Dim. (i)

Per indagine. Passo base  $n=0$ :  $0 \leq a_0 \leq 10.000$  Ok.  
2012

Passo induttivo. Ipotesi:  $0 \leq a_n \leq 10.000$     Tesi:  $0 \leq a_{n+1} \leq 10.000$

Dim. Prendo l'ipotesi e divido per  $n^2+3$  (che è una quantità  $>0$ , quindi conservo i versi)

$$\frac{0}{n^2+3} \leq \frac{a_n}{n^2+3} \leq \frac{10.000}{n^2+3}$$

$$0 \leq a_{n+1} \leq \frac{10.000}{n^2+3} \leq 10.000$$

↑  
denominatore + piccolo, quindi frazione + grande

Ho così ottenuto la tesi.

Oss. Il punto (i) è la LIMITATEZZA della successione (potrei sostituire 10.000 con qualunque numero  $\geq 2.012$ ).

Dim. (ii)

Prendo il p.to (i) e divido per  $(n^2+3)$ . Ottergo di nuovo

$$\boxed{0} \leq \boxed{a_{n+1}} \leq \boxed{\frac{10.000}{n^2+3}}$$

↓                ↓                ↓  
0                0                0

Per il teo. dei carabinieri ho che  $a_{n+1} \rightarrow 0$ .

Visto che  $a_{n+1} \rightarrow 0$ , avremo che anche  $a_n \rightarrow 0$  (sottosuccessione FINITA)

— 0 — 0 —

Esempio 2  $a_1 = 2012$   $a_{n+1} = \frac{n^3}{2^n} a_n$

Esperimenti:  $a_1 = 2012$ ,  $a_2 = \frac{1}{2} \cdot 2012 = 1.006$ ,  $a_3 = \frac{8}{4} a_2 = 2a_2 = 2012$

$$a_4 = \frac{27}{8} \cdot 2012 \geq 3 \cdot 2012 \geq 6.036$$

$$a_5 = \frac{64}{16} \cdot 6.036 = 4 \cdot 6.036 = 24.000 + q.c.$$

Idea:  $a_n \rightarrow 0$

PIANO CON RAPPORTO

(i)  $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Facile)

(ii)  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0$ , quindi  $a_n \rightarrow 0$

Dim. (ii)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \stackrel{\text{ricor.}}{=} \frac{n^3}{2^n} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{n^3}{2^n} \rightarrow 0$$

↓ questo termine tende a 0, ma inizialmente cresce,

Esempio 3

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 3n}{n+4}$$

$$a_0 = 2012$$

LIMIT. + CARAB.

(i)  $0 \leq a_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii)  $a_n \rightarrow 3$

Dim. (i)

Per induzione,  $n=0$   $0 \leq a_0 \leq 10.000$  ovvio

Passo induttivo

Ipotesi:  $0 \leq a_n \leq 10.000$  Tesi:  $0 \leq a_{n+1} \leq 10.000$

$$\text{Dim. } 0 \leq \frac{3n}{n+4} \stackrel{Hp}{\leq} \frac{2a_n + 3n}{n+4} \stackrel{Hp}{\leq} \frac{20.000 + 3n}{n+4} \stackrel{?}{\leq} 10.000$$

↑ *banale*                      "  $a_{n+1}$                       ↑ *spero*

Controllo la speranza:  $\frac{20.000 + 3n}{n+4} \leq 10.000 \Leftrightarrow$

$$20.000 + 3n \leq 10.000n + 40.000 \Leftrightarrow 0 \leq 9.997n + 20.000 \text{ che \u00e8}$$

verissimo, confermato dopo video

Dim. (ii) Dal punto (i) sappiamo, come abbiamo già scritto, che

$$\boxed{\frac{3n}{n+4}} \leq a_{n+1} \leq \boxed{\frac{20.000 + 3n}{n+4}}$$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$   
 $3 \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad 3$

Per i carabinieri abbiamo che  $a_{n+1} \rightarrow 3$ , quindi anche  $a_n \rightarrow 3$ .

Oss. Vediamo che succede impostando la monotonia

$$a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow \frac{2a_n + 3n}{n+4} \geq a_n \Leftrightarrow 2a_n + 3n \geq n a_n + 4 a_n$$

$$\Leftrightarrow (n+2) a_n \leq 3n \Leftrightarrow a_n \leq \frac{3n}{n+2}$$

$$\text{Analogamente: } a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow a_n \geq \frac{3n}{n+2}$$

Quindi per avere la monotonia mi servirebbe un piano in cui dal punto (i) seguisse che  $a_n \geq \frac{3n}{n+2}$

PIANO CON MONOTONIA

(i)  $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (conclusione! fine!)

(ii)  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (calcolo di sopra)

(iii)  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$  (solito)

(iv)  $l = 3$  (passaggio al limite)