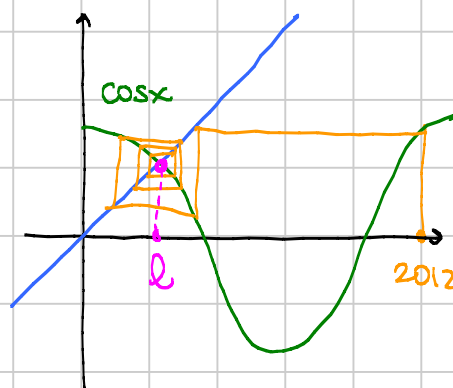


Esercizio $a_{n+1} = \cos a_n$ $a_0 = 2012$

Corrisponde a scrivere 2012 su una calcolatrice e poi continuare a premere "cos": quello che si ottiene sono i vari termini della succ.

Sperimentalmente si vede che dopo un po' il numero "non cambia più"



Idea: $\cos x = x$ ha un'unica soluzione reale l ed $a_n \rightarrow l$

Oss. Se fosse vero quanto dichiarato, iterare la successione per ricorrenza è un modo per approssimare la soluzione dell'equazione.

Prima parte: mostrare che l'equazione $\cos x = x$ ha un'unica soluzione.

Considero la funzione $f(x) = x - \cos x$ ed osservo che

$\rightarrow$ definita e continua in $\mathbb{R}$ con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Questo garantisce la surgettività, quindi esiste ALMENO una soluzione

$\rightarrow f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$ annullamento sporadico

$f'(x) \geq 0$ sempre con annullamento sporadico $\Rightarrow$ (Monotonia 3) $f(x)$

strett. crescente $\Rightarrow f$ iniettiva $\Rightarrow$ esiste AL PIÙ una soluzione.

Quindi la soluzione esiste ed è unica. Volendo sappiamo anche che la soluzione l dell'eq. sta tra 0 e 1: infatti $f(0) = -1$ e $f(1) = 1 - \cos 1 > 0$ quindi la soluzione sta tra 0 e 1 per il te. dei valori intermedi.

— 0 — 1 —

Torniamo alla successione per ricorrenza, quindi d'ora in poi $f(x) = \cos x$

Problema: $f(x)$ è lip. su tutto $\mathbb{R}$ con costante 1, questo produce

$d_{n+1} \leq d_n$, che non basta per dire che $d_n \rightarrow 0$

PIANO CON LA DISTANZA

Pongo

$$d_n = |a_n - l| \quad \text{soluzione di } \cos x = x$$

(banale induzione)

$$(i) -1 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \geq 1$$

$$(ii) d_{n+1} \leq (\sin 1) d_n \quad \forall n \geq 1$$

$$(iii) d_n \leq (\sin 1)^{n-1} d_1 \quad \forall n \geq 1$$

$$(iv) d_n \rightarrow 0, \text{ cioè } a_n \rightarrow l$$

(induzione a partire da (ii))

(solito carabinieri perché $\sin 1 \in (0,1)$)

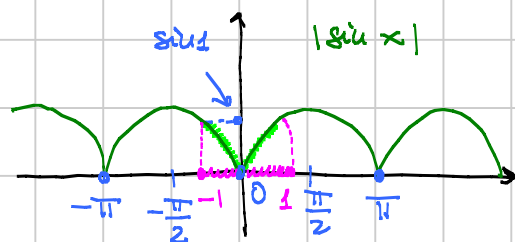
Dim (ii) Dico che $f(x) = \cos x$ è lip. in $[-1,1]$ con costante $C = \sin 1$

Infatti

$$C = \sup \{ |f'(x)| : x \in [-1,1] \} = \sup \{ |\sin x| : x \in [-1,1] \}$$

$$= \sin 1$$

Detto altrimenti: quando x varia tra -1 e 1 , il massimo valore raggiunto da $|\sin x|$ è $\sin 1$.



$$d_{n+1} = \underset{\text{def.}}{|a_{n+1} - l|} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ricor. +} \\ l = \cos l}}{|\cos(a_n) - \cos(l)|} \leq \underset{\text{lip.}}{(\sin 1) \cdot |a_n - l|} = (\sin 1) \cdot d_n$$

Abbiamo così dimostrato che $a_n \rightarrow l$. La convergenza è esponenziale per il p.to (iii). Ad esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|a_n - l|}_{d_n} \text{ come si comporta? Provo con il criterio del rapporto}$$

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{|a_{n+1} - l|}{|a_n - l|} = \frac{|\cos(a_n) - \cos(l)|}{|a_n - l|} = \frac{|f'(c_n)| \cdot |a_n - l|}{|a_n - l|}$$

$\uparrow$
Lagrange
 $f(x) = \cos x$

$$= |\sin(c_n)|$$

Ora c_n sta tra a_n ed l , quindi $c_n \rightarrow l$

$$\rightarrow \sin l < 1 \quad \text{e quindi } |\sin(c_n)| \rightarrow \sin l$$

$\uparrow$
perché $l \in [-1,1]$.

Poiché $\frac{d_{n+1}}{d_n} \rightarrow \sin l < 1$, si ha che $\sum d_n$ converge.

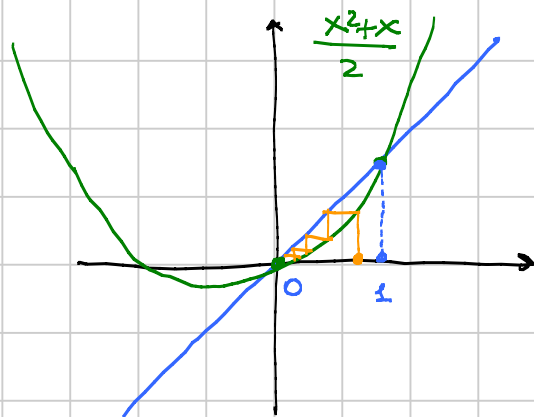
Achtung! $a_{n+1} = \frac{a_n + a_n^2}{2}$ $a_0 = \alpha$

Cosa succede al variare di α .

$$f(x) = \frac{x+x^2}{2} \quad f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x+x^2}{2} = x$$

$$\Leftrightarrow x+x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 = x$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ oppure } x=1.$$



Per $0 < \alpha < 1$ sembra che $a_n \rightarrow 0$ decrescendo

- PIANO**
- (i) $0 < a_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ inclusione + applico f
 - (ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ " "
 - (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ Solito
 - (iv) $l = 0$

Dim (iv) Passo al limite nella ricorrenza

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_n^2}{2} \quad \downarrow \quad l = \frac{l+l^2}{2} \Rightarrow l = 0 \text{ o } 1$$

Il punto (i) NON permette di escludere

$l=0$ e nemmeno $l=1$. Infatti

LE DISUGUAGLIANZE STRETTE NON PASSANO AL LIMITE

Come faccio per escludere $l=1$? Due modi

→ cambio il piano mettendo (i) $0 \leq a_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$

→ lascio invariato il piano, ma poi osservo che a_0 parte da α e poi è debolmente decrescente, quindi sarà sempre $\leq \alpha$, quindi non può tendere a 1.

[Esercizio: vedere cosa succede per gli altri valori di α].

— o — o —